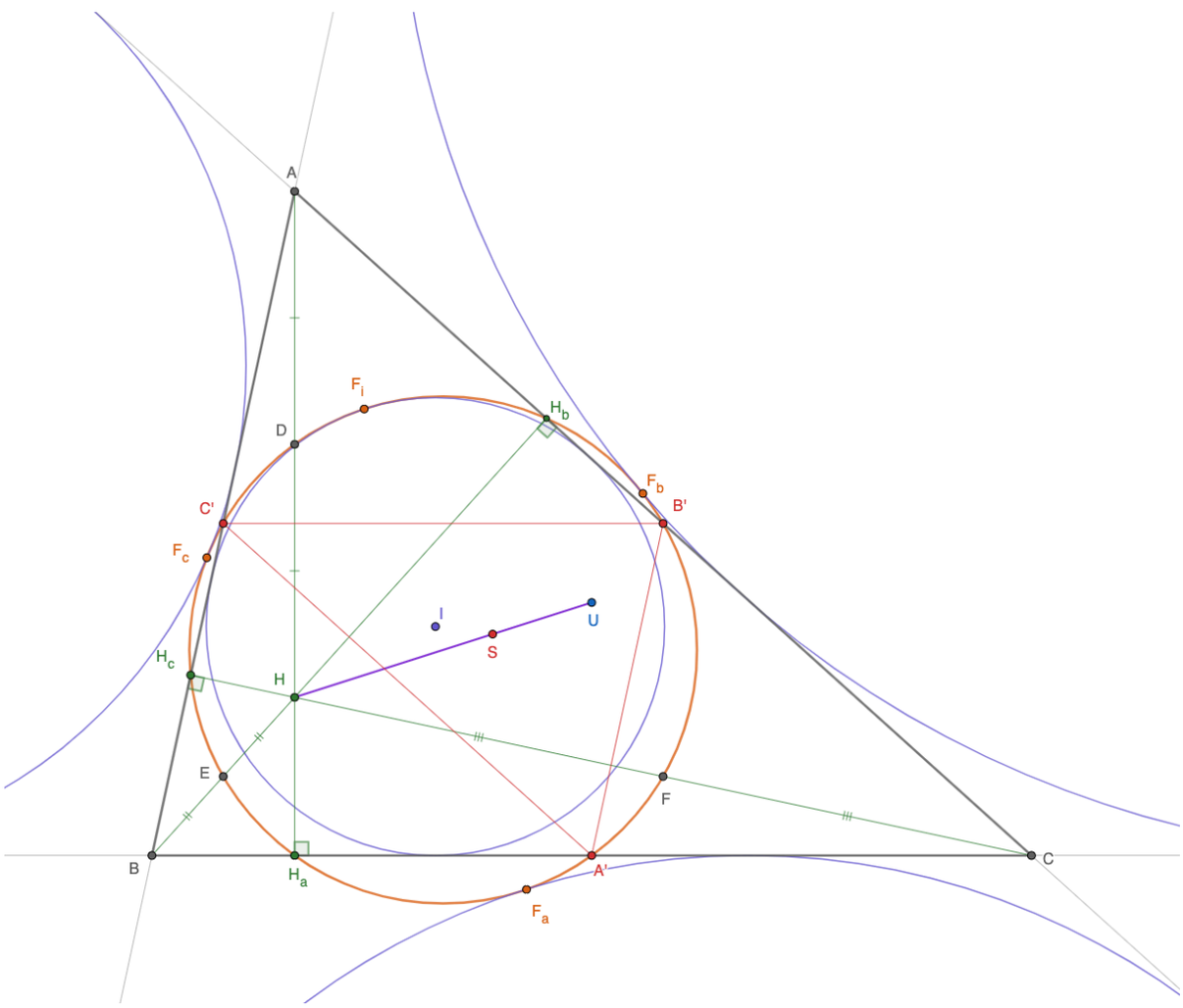
PAPA MATHS

LIVRE 2

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE

CONSTRUCTION & CONSTRUCTIBILITÉ



Rémy Trotabas

Un deuxième volume de Papa Maths : pourquoi et pour qui ?

La série Papa Maths aspire à être le **chainon manquant** entre des programmes scolaires appauvris et les exigences de l'enseignement scientifique supérieur, en particulier des classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieur.

Elle s'adresse aux lycéens francophones et germanophones qui aspirent à l'excellence.

Je pense que la préparation et la participation aux olympiades lycéennes de mathématiques ou au Concours Général offrent un cadre motivant et structuré pour corriger ce décalage.

Après la théorie des nombres, la géométrie euclidienne est le second domaine de prédilection des olympiades de maths. C'est donc logiquement le sujet de ce second livre.

Il est conçu spécifiquement :
- pour être abordable dès la classe de 3ème / 9. Klasse
- pour pouvoir être lu de façon linéaire : tout se suit, tout est justifié, tout est expliqué dans le moindre détail.

La géométrie fut longtemps une discipline reine des mathématiques. Il n'en reste dans les programmes scolaires que de tristes ruines incohérentes à travers lesquelles les élèves naviguent dans un profond sentiment d'incomplétude.
Ceux qui veulent aller plus loin trouveront un poly par-ci, un article par-là, mais rien qui intègre l'ensemble de façon acceptablement systématique et progressive en partant des seuls acquis du collège.

L'objectif premier de ce livre est de remédier à ce problème en rassemblant en un lieu les connaissances de géométrie euclidienne nécessaires pour concourir avec succès.

L'objectif second est de transmettre cet ensemble de connaissances de façon la plus efficace possible. Une bonne démonstration demande au lecteur pour être comprise un effort intellectuel minimal, sa logique est transparente et mémorisable. Pour s'approcher de cet idéal on a énormément travaillé la mise en page, la rédaction et les figures.

Un autre aspect de Papa Maths c'est l'approche bilingue. Outre l'aspect positif pour l'apprentissage des langues, il est intéressant de lire les mathématiques dans les deux langues où, pour l'essentiel, elles ont été inventées : le français et l'allemand.

Merci d'envoyer vos commentaires et suggestions sur papamaths.org

Version électronique 1.0

L'ISBN de la version reliée est 978-3-9824279-0-4

Site officiel : https://papamaths.org

© 2022-2026 Rémy Trotabas
Röttenbach – Bayern – Deutschland

Licence :
Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY-NC-ND 4.0)
– Pas d'utilisation commerciale
– Pas de modification

La diffusion libre et gratuite auprès des élèves, étudiants, enseignants et clubs de mathématiques est encouragée.

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE

CONSTRUCTION & CONSTRUCTIBILITÉ

La géométrie euclidienne à 2 ou 3 dimensions (euklidische Geometrie, Elementargeometrie), s'intéresse à l'étude des points, droites, cercles, plans, distances, angles…
C'est, avec la géométrie cartésienne, la géométrie enseignée au lycée.

Cette géométrie est basée sur un système d'axiomes et postulats formulés par **Euclide** il y a plus de 2000 ans ; un système revu et corrigé par **David Hilbert** qui publia en 1899 dans *Grundlagen der Geometrie* un nouveau système plus rigoureux de 21 axiomes, qui sont détaillés à la fin de ce livre.

Nous nous limitons ici à la géométrie plane (la géométrie dans le plan, la géométrie à deux dimensions).

Nous allons faire un tour complet de la boite à outils géométriques, en approfondissant la géométrie du cercle et la géométrie du triangle, dans le but explicite d'affronter avec sérénité les olympiades lycéennes de mathématiques.

Puis nous allons étudier en détail la problématique de la construction à la règle et au compas.
Nous allons suivre l'intégralité du chemin menant au théorème de Wantzel sur la constructibilité des nombres. Enfin vient en apothéose un tour de force algébrique : le théorème de Gauss-Wantzel sur la constructibilité des polygones réguliers, tel l'heptadécagone dans lequel est inscrit le logo des Mathematik Olympiaden.

Ainsi au fil de l'histoire on montre les liens étroits avec l'algèbre, en espérant vous montrer l'intérêt et la puissance de cette branche des mathématiques que vous étudierez dans l'enseignement supérieur.

LES OUTILS GÉOMÉTRIQUES ESSENTIELS 6
NOTATIONS & CONVENTIONS 7
ALPHABET GREC 7
THÉORÈME DE PYTHAGORE 8
ANGLES OPPOSÉS – ANGLES CORRESPONDANTS 9
SOMME DES ANGLES D'UN POLYGONE 9
POLYGONES CONVEXES, CONCAVES, CROISÉS 9
THÉORÈME DE THALÈS - STRAHLENSATZ 10
THÉORÈME DE LA DROITE DES MILIEUX – SATZ DER MITTELPARALLELEN 12
KONGRUENZSÄTZE 13
ÄHNLICHKEITSSÄTZE 13
TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES 14
TECHNIQUE DE LA CHASSE AUX TANGENTES - TANGENTENABSCHNITTSSATZ 15
THÉORÈME DE PITOT – SATZ VOM TANGENTENVIERECK 17
GÉOMÉTRIE DU CERCLE 18
DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE 19
RAPPEL DE QUELQUES PROPRIÉTÉS 19
THÉORÈME DE L'ANGLE AU CENTRE 20
THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT 21
DAS SEHNENVIERECK – QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE 21
TECHNIQUE DE LA CHASSE AUX ANGLES - WINKELJAGD 22
CAS PARTICULIER - THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT DANS UN DEMI-CERCLE 23
SEHNEN-TANGENTENWINKEL-SATZ 24
SEHNENSATZ 25
SEKANTENSATZ 25
SEKANTEN-TANGENTEN-SATZ 25
SATZ ÜBER SUPPLEMENTARE WINKEL IM SEHNENVIERECK 26
ANGLE INTÉRIEUR – ANGLE EXTÉRIEUR 27
THEORÈME DES 2 CERCLES DE REIM 28
THÉORÈME DES TROIS CERCLES DE MONGE 29
THÉORÈME DES 3 CERCLES DE MIQUEL 30
LA DROITE DE SIMSON 31
LA DROITE DE STEINER 32
LE POINT DE MIQUEL - THEORÈME DES 4 CERCLES DE MIQUEL 33
THÉORÈME DE PTOLÉMÉE 34
THÉORÈME DE CASEY 35
THÉORÈME DU PÔLE SUD – propriétés de base 36
THÉORÈME DU PÔLE SUD – propriétés étendues 37
JAPANISCHER SATZ FÜR KONZYKLISCHE VIERECKE 38
CERCLES ORTHOGONAUX 40
TROIS PROPRIETÉS DES CERCLES ORTHOGONAUX 40
PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT À UN CERCLE 43
AXE RADICAL DE DEUX CERCLES 44
THÉORÈME DES AXES RADICAUX 45
INVERSION 46
THEORÈME DES 6 CERCLES DE MIQUEL 49
GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE 50
UN PEU D'HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE 51
DÉFINITIONS 52
NOTATIONS ET RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DE BASE 53
THÉORÈME DE LA BISSECTRICE - WINKELHALBIERENDENSATZ 54
HÖHENSATZ 55
THÉORÈME D'EUCLIDE - KATHETENSATZ 55
SATZ VON MENELAUS 56
SATZ VON CEVA 57
THÉORÈME DE PAPPUS 58
THÉORÈME FAIBLE DE DESARGUES 59
MÉDIANES 60
HAUTEURS 62
LE TRIANGLE ORTHIQUE - DAS HÖHENFUßPUNKTDREIECK 66
LE CERCLE DE TAYLOR - DER TAYLOR-KREIS 69
MÉDIATRICES 70
BISSECTRICES 71
LES 3 CERCLES EXINSCRITS 72
LE THÉORÈME DES BISSECTRICES 2.0 74
CERCLE D'APOLONIUS 75
POINTS ISODYNAMIQUES 76
DIVISION HARMONIQUE & CERCLE D'APPOLONIUS 77
LA DROITE D'EULER - DIE EULER-GERADE 78
LE CERCLE D'EULER – DER FEUERBACH-KREIS – CERCLE DES NEUFS POINTS 80
CONJUGUÉS ISOTOMIQUES 85

CONJUGUÉS ISOGONAUX - ISOGONALE PUNKTE 86
H et U SONT CONJUGUÉS ISOGONAUX 88
LE POINT DE LEMOINE – conjugué isogonal du centre de gravité 89
LE POINT DE GERGONNE ET LE POINT DE NAGEL 90
LE TRIANGLE ANTIMEDIAL - DAS ANTIMEDIALDREIECK 92
LE TRIANGLE TANGENT - DAS TANGENTENDREIECK 93
DAS ANTIMEDIAL DREIECK IST ISOGONAL ZUM TANGENTENDREIECK 94
DER LEMOINE-PUNKT EINES DREIEKS IST DER GERGONNE-PUNKT DES TANGENTENDREIECKS 94
THÉORÈME DE TERQUEM – POINTS DE TERQUEM – CONJUGUÉS CYCLOCÉVIENS 95
LE TRIANGLE DE NAPOLÉON 96
LES POINTS DE FERMAT - TORRICELLI 97
LES POINTS DE NAPOLÉON 97
LES POINTS DE VECTEN 97
LES POINTS DE RÉMY 98
LES TRIANGLES DE KIEPERT 99
LIEUX ISOGONAUX 100
L'HYPERBOLE DE KIEPERT - DIE KIEPERT HYPERBEL 101
L'HYPERBOLE DE JERABEK 103
L'HYPERBOLE DE FEUERBACH 103
LE CERCLE DE VAN LAMOEN 104
LE CERCLE DE LESTER 105
ENCYCLOPAEDIA OF TRIANGLE CENTERS 106
RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE QUELCONQUE 107
DÉMONSTRATIONS DE RELATIONS MÉTRIQUES 108

LA BOITE À OUTILS 110
CONSEILS DE RÉSOLUTION ET DE RÉDACTION 111

CONSTRUCTION À LA RÈGLE ET AU COMPAS 112
CONSTRUCTIONS GÉOMETRIQUES DE BASE 113
ARITHMÉTIQUE À LA RÈGLE ET AU COMPAS 114
ENSEMBLE DES NOMBRES CONSTRUCTIBLES – THÉORÈME DE WANTZEL 120
LES 3 CELÈBRES PROBLÈMES DE CONSTRUCTION DE L'ANTIQUITÉ 123
CONSTRUCTION DES POLYGONES RÉGULIERS 124
PROPRIÉTES DU PENTAGONE RÉGULIER - TRIANGLE D'OR ET NOMBRE D'OR 125
CONSTRUCTION DU PENTAGONE RÉGULIER 126
PENTADECAGONE – 15-Ecke 129
HEPTADECAGONE – 17-Ecke 130
THÉORÈME DE GAUSS-WANTZEL 131
CONSTRUCTION DES TANGENTES À UN CERCLE PASSANT PAR UN POINT DONNÉ 134
CONSTRUCTION DES TANGENTES À DEUX CERCLES TANGENTS & DES MOYENNES 135
CONSTRUCTION DES TANGENTES À DEUX CERCLES 137
CONSTRUCTION DE L'ANGLE TRIPLE 138
L'ANGLE DE 20 DEGRÉS 138
NONAGONE RÉGULIER 139
TRISECTION - CONSTRUCTION NEUSIS AVEC RÈGLE MARQUÉE 140
THÉORÈME DE MOHR-MASCHERONI 141
THÉORÈME DE PONCELET-STEINER 141
CONSTRUCTION DU CARRÉ - AU COMPAS SEUL 142
CONSTRUCTION DU MILIEU D'UN SEGMENT - AU COMPAS SEUL 143
CERCLE DE NAPOLÉON - MASCHERONI 144
PANORAMA DES THÉORÈMES ET OBJETS REMARQUABLES 147

HILBERTS AXIOMENSYSTEM DER EUKLIDISCHEN GEOMETRIE 148

UNE DÉMONSTRATION ENTIÈREMENT SYNTHÉTIQUE DU THÉORÈME DE FEUERBACH 151
LE THÉORÈME DE REIM 152
LES THÉORÈMES DE REIM - AYME 153
DU THÉORÈME DE REIM AUX THÉORÈMES DES CERCLES DE MIQUEL 154
REFORMULATION DU THÉORÈME DES 6 CERCLES DE MIQUEL 157
THÉORÈME DES 6 CERCLES DE MIQUEL 2.0 157
THÉORÈME DU CERCLE ANTARCTIQUE 2.0 158
THÉORÈME DU CERCLE ARCTIQUE 164
DÉMONSTRATION SYNTHÉTIQUE DU THÉORÈME DE FEUERBACH 165

BIBLIOGRAPHIE & REMERCIEMENTS 166
QUELQUES RECOMMANDATIONS FINALES 167

LES OUTILS GÉOMÉTRIQUES ESSENTIELS

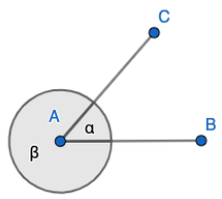
NOTATIONS & CONVENTIONS

Dans tout ce livre nous allons utiliser de façon systématique, et sans les redéfinir à chaque page, les notations canoniques (standardisées) suivantes :

ABC représente un triangle quelconque de sommets A, B, C.

Les longueurs de ses côtés sont notés a = BC b = CA c = AB

Ses angles sont notés α = angle en A β = angle en B γ = angle en C



BAC (en italique) représente l'angle de sommet A, allant dans le sens trigonométrique de [AB] vers [AC] tandis que BAC (pas en italique) représente le triangle de sommets A, B, C. Sur la figure : *BAC* = α et *CAB* = β
Ceci dit, dans un document aussi long on n'est pas à l'abri d'une coquille…

Pour gagner en lisibilité on se permet un peu de liberté avec le formalisme rigoureux en utilisant de façon indifférenciée AB pour designer la droite (AB), le segment [AB] ou la longueur du segment [AB] traditionnellement notée |AB| ou $\overline{AB}$. On assume que le lecteur est conscient de la nature des objets qu'il manipule et on ne précisera (AB), [AB] ou AB que si le contexte est équivoque.

$\mathcal{C}$(O, r) représente le cercle de centre O et de rayon r.
$\mathcal{C}$(A, AB) représente le cercle de centre A et de rayon AB.

ALPHABET GREC

A un moment ou à un autre celui qui s'intéresse aux maths ou à la physique devra apprendre l'alphabet grec.
En hommage aux fondateurs de la géométrie, voici venu un moment fort opportun pour s'y mettre.
Il comporte 24 lettres.

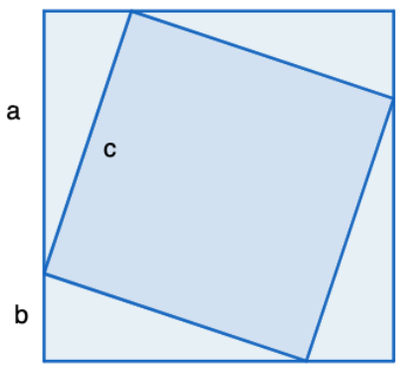
Nom	Minuscule	Majuscule	Equivalent
Alpha	α	Α	a
Beta	β	Β	b
Gamma	γ	Γ	g
Delta	δ	Δ	d
Epsilon	ε	Ε	é *bref*
Zéta	ζ	Ζ	z
Eta	η	Η	e *long*
Théta	θ	Θ	th
Iota	ι	Ι	i
Kappa	κ	Κ	k
Lambda	λ	Λ	l
Mu	μ	Μ	m
Nu	ν	Ν	n
Xi	ξ	Ξ	x *cs*
Omikron	ο	Ο	o *bref*
Pi	π	Π	p
Rho	ρ	Ρ	r
Sigma	σ	Σ	s
Tau	τ	Τ	th
Upsilon	υ	Υ	u
Phi	φ	Φ	f
Khi	χ	Ξ	kh
Psi	ψ	Ψ	ps
Oméga	ω	Ω	o *long*

THÉORÈME DE PYTHAGORE

Démonstration 1

On évalue la surface S du grand carré de deux manières :

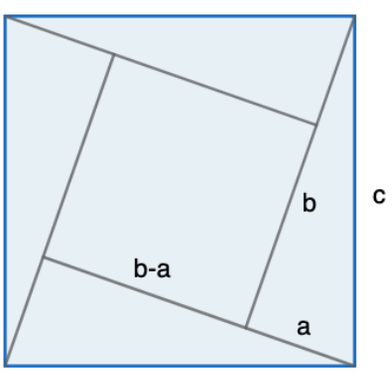
Grand carré	$S = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Ses composantes	$S = c^2 + 4\ (ab/2) = c^2 + 2ab$
Donc	$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$



Démonstration 2

On évalue la surface S du grand carré de deux manières :

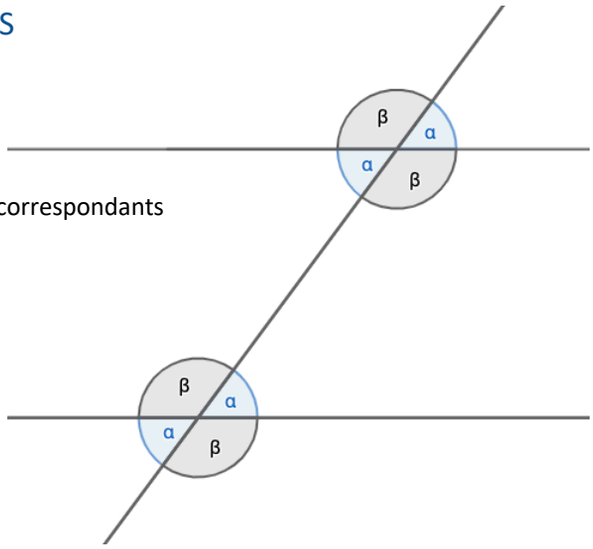
Grand carré	$S = c^2$
Ses composantes	$S = (b - a)^2 + 4\ (ab/2)$
	$= b^2 - 2ab + a^2 + 2ab$
	$= a^2 + b^2$
Donc	$a^2 + b^2 = c^2$



Il y a une cinquantaine d'autres démonstrations.

ANGLES OPPOSÉS – ANGLES CORRESPONDANTS

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, les **angles correspondants** ainsi formés sont égaux.



Réciproquement :
Si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants de même mesure, alors les deux droites sont parallèles.

Deux angles **opposés** par le sommet ont la même mesure.

Et bien sûr : $\alpha + \beta = 180$

Winkel an geschnittenen Parallelen / Nebenwinkel
Scheitelwinkel / Stufenwinkel / Wechselwinkel

SOMME DES ANGLES D'UN POLYGONE

La somme des angles d'un polygone à n cotés est 180.(n-2)

Pour le triangle : 180.(3-2) = 180
Le triangle régulier (triangle équilatéral) a donc des angles intérieurs de 180 / 3 = 60°

Pour le quadrilatère : 180.(4-2) = 360
Le quadrilatère régulier (carré) a donc des angles intérieurs de 360 / 4 = 90°

Pour le pentagone : 180.(5-2) = 540
Le pentagone régulier a donc des angles intérieurs de 540 / 5 = 108°

Démonstration par récurrence
Passer d'un polygone de n côtés à un polygone à n+1 côtés, c'est ajouter un triangle à un polygone à n côtés.

Remarque : le fait que la **somme des angles d'un triangle vaille 180°** s'appuie sur l'axiome des parallèles.
C'**est une « vérité » axiomatique** propre à la géométrie euclidienne / hilbertienne **qui n'est pas démontrable**.
Il existe des géométries non-euclidiennes où la somme des angles d'un triangle ne vaut pas 180.

POLYGONES CONVEXES, CONCAVES, CROISÉS

Un polygone est convexe s'il n'est pas concave i.e. s'il n'a pas d'angle rentrant.
Les convexes c'est ceux qui ne sont pas bizarres. Heu... peut-on faire plus précis ? Si vous insistez :

Ein Vieleck heißt **konvex** genau dann, wenn zu je zwei Punkte A und B auf dem Rand oder im Inneren des Vielecks, alle Punkte der Strecke [AB] im Inneren oder am Rand des Vielecks liegen.

Ein Vieleck heißt **konkav** genau dann, wenn es zwei Punkte A und B auf dem Rand oder im Inneren des Vielecks gibt, so dass es Punkte der Strecke [AB] gibt, die außerhalb des Vielecks liegen.

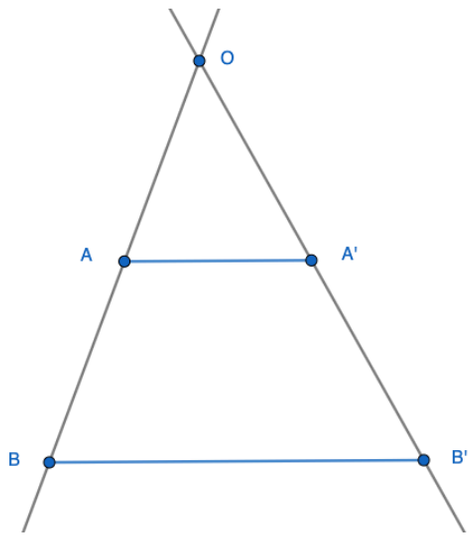
Ein Vieleck heißt **überschlagen** genau dann, wenn Kanten sich in einem Punkt schneiden, der kein Eckpunkt des Vielecks ist.

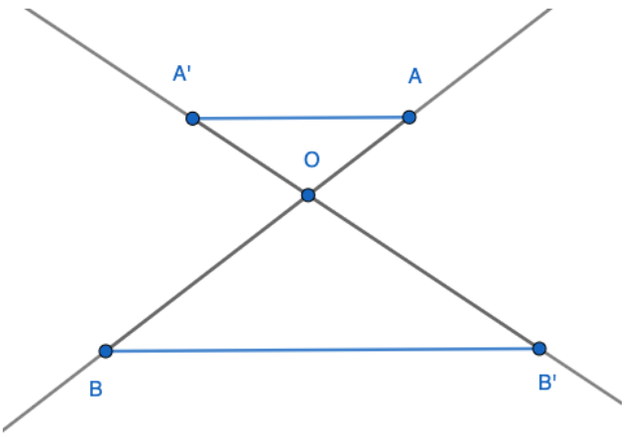
THÉORÈME DE THALÈS - STRAHLENSATZ

Soient deux droites (OB) et (OB') qui se coupent en O.
Soient un point A sur (OB) et un point A' sur (OB') tels que (AA') soit parallèle à (BB').
Alors :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

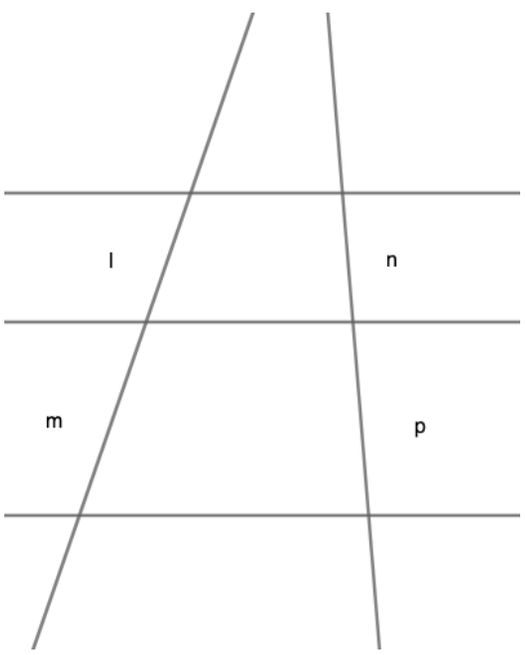
Deux configurations possibles :





Autre formulation :

Un faisceau de droites parallèles détermine sur deux droites sécantes distinctes des segments homologues proportionnels.



$$\frac{l}{m} = \frac{n}{p}$$

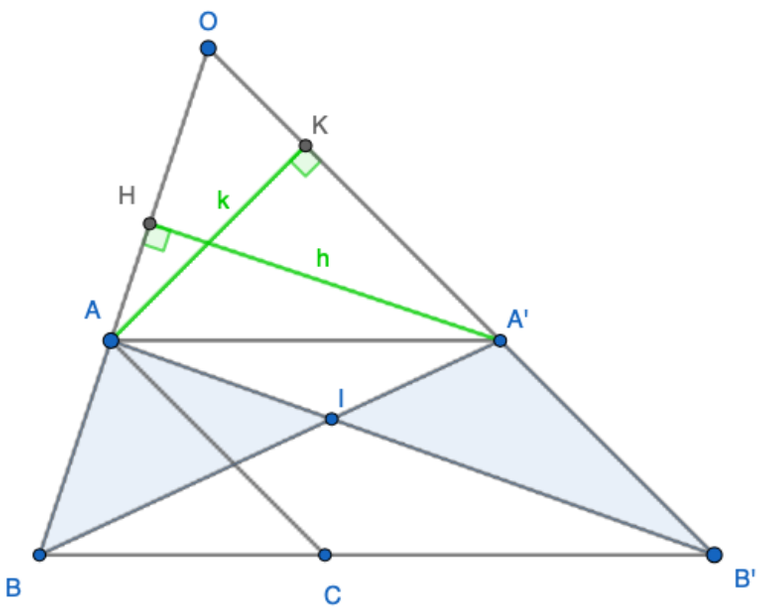
Attention : avec cette formulation la deuxième égalité n'est pas valable.

Réciproque du théorème de Thalès

Dans un triangle OBB', supposons donnés des points A et A' appartenant respectivement aux segments [OB] et [OB'].
Si les rapports OA/OB et OA'/OB' sont égaux, alors les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

→ Cette réciproque est utile pour démontrer un parallélisme.

Démonstration du théorème de Thalès



Soient 2 droites AB et A'B' qui se coupent en O, telles que AA' // BB'
On note I l'intersection de AB' et BA'
On note AK la hauteur issue de A sur OA' AK = k
On note AH la hauteur issue de A' sur OA A'H = h

ABB'A' est un trapèze. d est la distance entre AA' et BB'.

BB'A et BB'A' ont la même base et la même hauteur, donc la même aire : ½ .BB'.d = $S_{BB'A} = S_{BB'A'} = S_1$

BB'A est composé de BIB' et ABI BB'A' est composé de BIB' et A'B'I, donc

$S_1 = S_{BIB'} + S_{ABI} = S_{BIB'} + S_{A'B'I}$ donc $\boxed{S_{ABI} = S_{A'B'I}}$

$S_{OA'B} = S_{OAIA'} + S_{ABI} = S_{OAIA'} + S_{A'B'I}$ donc $\boxed{S_{OA'B} = S_{OAB'}}$

OAA' et OA'B ont la même hauteur h, donc $S_{OAA'} / S_{OA'B}$ = (½.OA.h) / (½.OB.h) = OA / OB

OAA' et OAB' ont la même hauteur k, donc $S_{OAA'} / S_{OAB'}$ = (½.OA'.k) / (½.OB'.k) = OA' / OB'

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$ **Première égalité du théorème de Thalès**

On construit C tel que AC // A'B'
En utilisant dans BB'O la première égalité de Thalès que nous venons de démontrer on a :

$$\frac{BA}{BO} = \frac{BC}{BB'} \iff \frac{BO-AO}{BO} = \frac{BB'-CB'}{BB'} \iff 1-\frac{AO}{BO} = 1-\frac{CB'}{BB'} \iff \frac{AO}{BO} = \frac{CB'}{BB'}$$

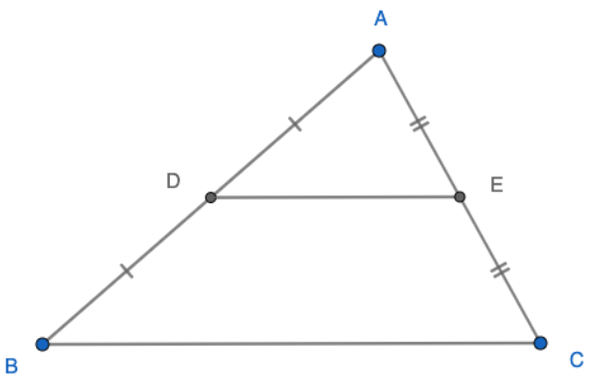
AA'B'C est un parallélogramme et AA' = CB' donc

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'}$$ **Deuxième égalité du théorème de Thalès**

THÉORÈME DE LA DROITE DES MILIEUX – SATZ DER MITTELPARALLELEN

In einem Dreieck ist die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten stets parallel zur dritten Dreiecksseite und stets halb so lang wie diese: BC = 2 DE

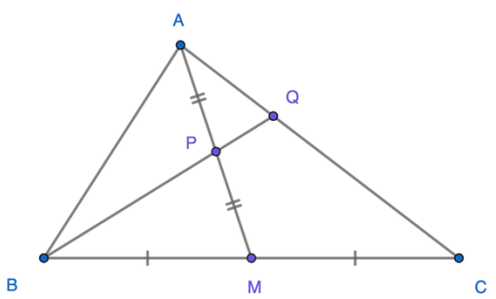
C'est un corollaire du théorème de Thalès.
Il faut développer un automatisme :
2 milieux sont donnés = il y a deux droites parallèles.



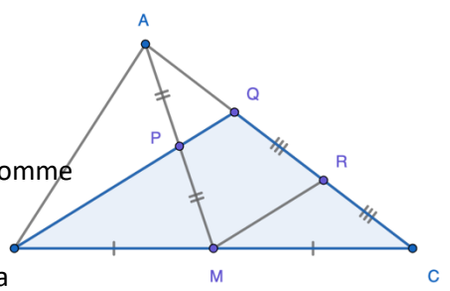
Démonstration
Die Parallelitätsbehauptung folgt aus der Umkehrung des ersten Strahlensatzes.
Die Aussage über das Längenverhältnis ergibt sich mit dem zweiten Strahlensatz.

Exemple d'application

Soit un triangle ABC quelconque de surface 1.
Soit M le milieu de [BC]
Soit P le milieu de [AM]
Soit Q l'intersection de (BP) et (AC)
Quelle est la surface de MCQP ?

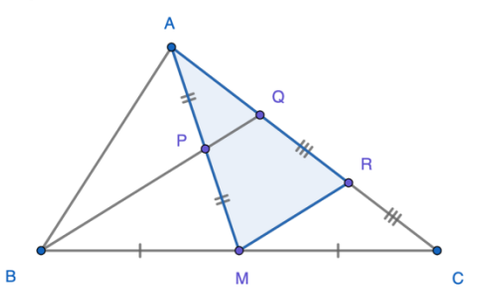


Introduisons le point R milieu de [QC]
Par définition QR = RC [1]
Dans le triangle BCQ, d'après le théorème de la droite des milieux, comme BM = MC et QR = RC on a **(BQ) // (MR)**



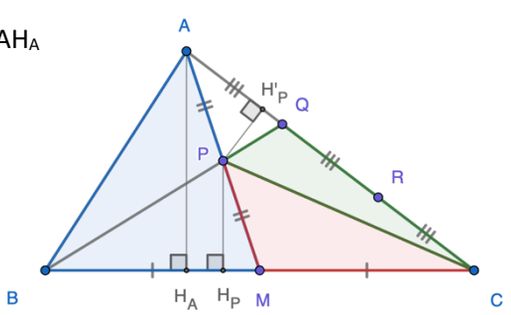
Dans le triangle AMR, comme la droite (BQ) est identique à (PQ) on a (PQ) // (MR).
D'après le théorème de Thalès dans AMR : AP / AM = AQ / AR
Comme par définition de P : AP / AM = ½
on a AQ / AR = ½ donc **AQ = QR** [2]

[1] et [2] QR = RC = AQ donc **QC = 2/3 AC**



La surface de ABC = S(ABC) = ½ BC . AH_A
S (ABM) = ½ BM . AH_A = ¼ BC . AH_A **S (ABM) = ½**

D'après le théorème de Thalès dans AH_AM on a MP / MA = PH_P / AH_A
Comme par définition de P : MP / MA = ½
on a **PH_P = ½ AH_A** alors **S(MCP) = ½ MC . PH_P = ¼**



S(ACP) = S(ABC) – S(ABM) – S(MCP) = 1 - ½ - ¼ = ¼
CQP et AQP ont la même hauteur donc S(CQP) / S(AQP) = CQ/AQ
Donc **S(CQP) =** 2/3 . S(ACP) = 2/3 . 1/4 **= 1/6**
S(MCQP) = S(MCP) + S(CQP) = 1/4 + 1/6 **= 5/12**

KONGRUENZSÄTZE

Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent = isométriques, wenn sie…

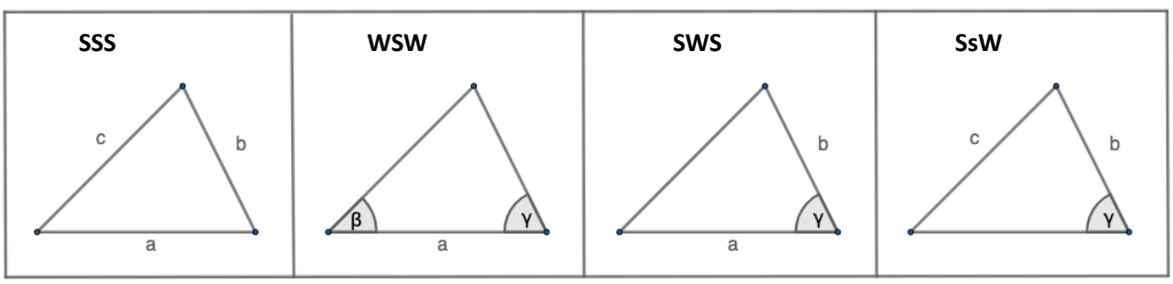
SSS-Satz **…** in ihren 3 Seitenlänge übereinstimmen.

WSW-Satz **…** in einer Seitenlänge und in den dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen

SWS-Satz **…** in 2 Seitenlänge und in dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen

SsW-Satz … in 2 Seitenlängen und in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt

Stimmen zwei Dreiecke in zwei oder allen drei Innenwinkeln überein, so sind sie nicht notwendigerweise kongruent. Sie sind jedoch **ähnlich**.



ÄHNLICHKEITSSÄTZE

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich = semblables, wenn sie…

W:W:W-Satz … in 2 (und somit in 3) Winkeln übereinstimmen.

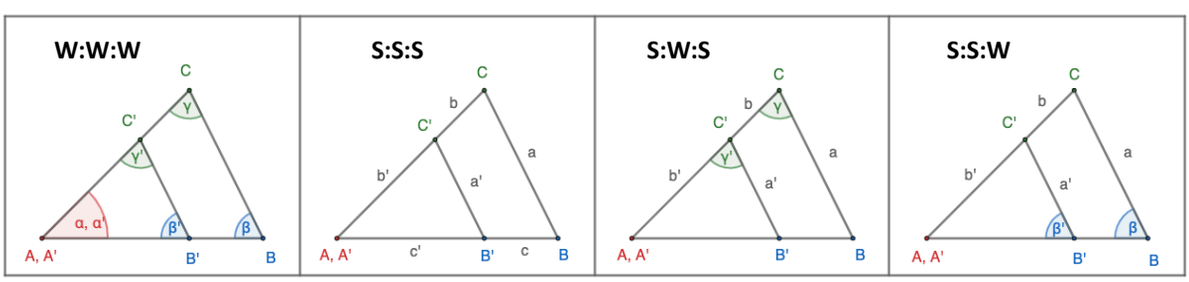
S:S:S-Satz … in allen Verhältnissen entsprechender Seiten übereinstimmen.

S:W:S-Satz … in einem Winkel und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen.

S:S:W-Satz … im Verhältnis zweier Seiten und in dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

In den folgenden Abbildungen sind jeweils zwei ähnliche Dreiecke ABC und A'B'C' "ineinander geschachtelt". Dann ist jedes Seitenlängenpaar in ABC quotientengleich zu dem entsprechenden Seitenlängenpaar in A'B'C'.

On note : ABC ~ A'B'C'
La relation ~ est réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.



$\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$ $\gamma = \gamma'$

$a / a' = (b+b') / b' = (c+c') / c$

$a / a' = (b+b') / b'$
$\gamma = \gamma'$

$a / a' = (b+b') / b'$
$\beta = \beta'$

TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES

Une transformation géométrique est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire une manière d'associer à chaque point un autre point, de telle manière que tout point soit l'image d'un autre point, et que deux points différents aient des images différentes.

Un intérêt important des transformations géométriques est la possibilité de les composer.
Pour les transformations t_1 et t_2 on note $t_2 \circ t_1$ la transformation qui à tout point M associe t_2 (t_1 (M))
Cette composition consiste à appliquer t_1 puis t_2. « o » se lit « rond ».

La symétrie axiale d'axe (d) associe à tout point M le point M' tel que (d) soit la médiatrice de [MM'].

La symétrie centrale de centre O associe à tout point M le point M' tel que O soit le milieu de [MM'].

Un vecteur, noté $\vec{v}$, est un objet géométrique caractérisé par une direction, un sens et une longueur.
On dessine un vecteur avec une flèche. Le vecteur partant du point A et allant jusqu'au point B est noté $\overrightarrow{AB}$.

La translation de vecteur $\vec{v}$ associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Les symétries centrales et axiales et les translations conservent les droites, les cercles, les angles, les longueurs.

Les symétries centrales et les translations conservent les angles orientés.

Les symétries axiales inversent les angles orientés.

La rotation de centre O et d'angle orienté θ associe à tout point M le point M' tel que OM' = OM et $\widehat{MOM'} = \theta$
Les rotations conservent les droites, les longueurs, les cercles, les angles.
Les symétries centrales sont des rotations d'angle π
Soient r_1 et r_2 deux rotations d'angles θ_1 et θ_2 alors $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1+\theta_2$
Exemple d'application : voir le triangle de Napoléon.

L'homothétie de centre O et de rapport k associe à tout point M le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$
a) L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à celle-ci.
b) L'homothétie conserve les angles, donc elle conserve toutes les propriétés qui peuvent s'exprimer avec des angles, comme l'alignement ou la cocyclicité.
c) Une homothétie multiplie toutes les longueurs par |k|. Elle conserve donc les rapports de longueurs.
d) Si k = -1 on retrouve la symétrie centrale.

Soient h_1 et h_2 deux homothéties de centres O_1 et O_2 et de rapports k_1 et k_2
alors $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport k_1k_2 dont le centre est sur (O_1O_2)

Les homothéties (zentrische Streckung) sont un outil très puissant pour la résolution d'exercices de géométrie du triangle et du cercle.
Exemples d'application : voir la droite d'Euler et le cercle d'Euler.

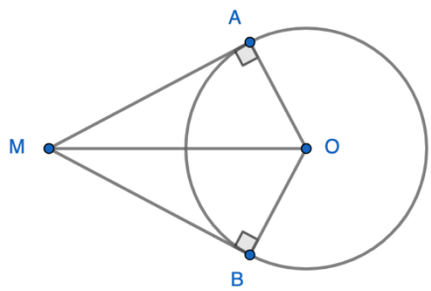
La similitude directe de centre O, de rapport k et d'angle θ est la composée
de l'homothétie de centre O et de rapport k et de la rotation de centre O et d'angle θ.
Cette transformation multiplie les longueurs par |k| et conserve les angles.
L'image d'un triangle par une similitude est un triangle qui lui est … semblable !

TECHNIQUE DE LA CHASSE AUX TANGENTES - TANGENTENABSCHNITTSSATZ

La technique de la chasse aux tangentes consiste à exploiter le fait que des droites soient tangentes à des cercles pour obtenir des égalités de longueur et trouver d'autres droites tangentes.

L'idée est d'utiliser de manière répétée le résultat suivant :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle et M un point extérieur à $\mathcal{C}$.
Les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par M touchent $\mathcal{C}$ en A et B.
Alors **MA = MB**



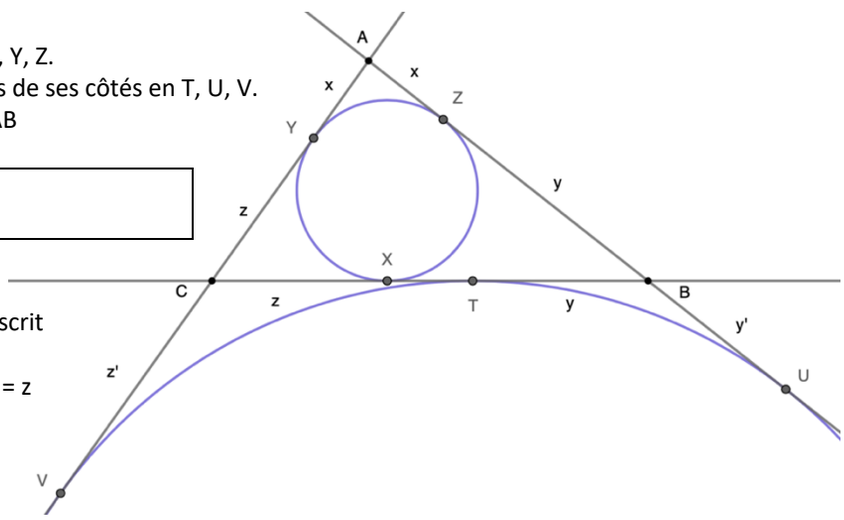
Démonstration

Pythagore dans MOA qui est rectangle en A $MO^2 = OA^2 + MA^2$
Pythagore dans MOB qui est rectangle en B $MO^2 = OB^2 + MB^2$
Donc $OA^2 + MA^2 = OB^2 + MB^2$
Comme OA = OB = rayon du cercle
$MA^2 = MB^2$
MA = MB

Premier exemple de chasse aux tangentes

Soit ABC un triangle quelconque.
Son cercle inscrit touche ses côtés en X, Y, Z.
Son cercle A-exinscrit touche les droites de ses côtés en T, U, V.
Avec les notations a = BC b= AC c= AB

Montrons que **BX = CT = ½ (a+c-b)**
et **CX = BT = ½ (a+b-c)**



La chasse aux tangentes sur le cercle inscrit livre trois équations :
AY = AZ = x BZ = BX = y CX = CY = z

BC = BX + XC s'écrit a = y + z
AC = AY + YC s'écrit b= x + z
AB = AZ + ZB s'écrit c= x + y

et alors :
½ (a+c-b) = ½ (y+z+x+y-x-z) = ½ (2y) = y = BX
½ (a+b-c) = ½ (y+z+z+x-x-y) = ½ (2z) = z = CX

QED partiel

La chasse aux tangentes sur le cercle exinscrit livre aussi trois équations :
CV = CT = z' BU = BT = y' et celle qui est moins facile à voir : AV = AU

BC = BT + TC s'écrit a = y' + z'
AV = AU s'écrit b + z' = c + y' c'est à dire c - b = z' - y' ou encore b - c = y' - z'

et alors :
½ (a+c-b) = ½ (y'+z'+z'-y') = ½ (2z') = z' = CT
½ (a+b-c) = ½ (y'+z'+y'-z') = ½ (2y') = y' = BT

QED final

Second exemple de chasse aux tangentes

Sei ABC ein beliebiges Dreieck.
Sein Inkreis berührt BC in X, AC in Y und AB in Z.

Die Inkreise der Dreiecke *ABX* und *ACX* berühren einander.

Beweis

Der Inkreis des Dreiecks ABX mit Mittelpunkt U berührt BX in K, AB in L und AX in **M**.
Der Inkreis des Dreiecks ACX mit Mittelpunkt V berührt CX in N, CA in P und AX in **Q**.

Da UM ⊥ AX und VQ ⊥ AX (AX ist die Tangente beider Inkreise)
ist lediglich zu beweisen, dass **M = Q**

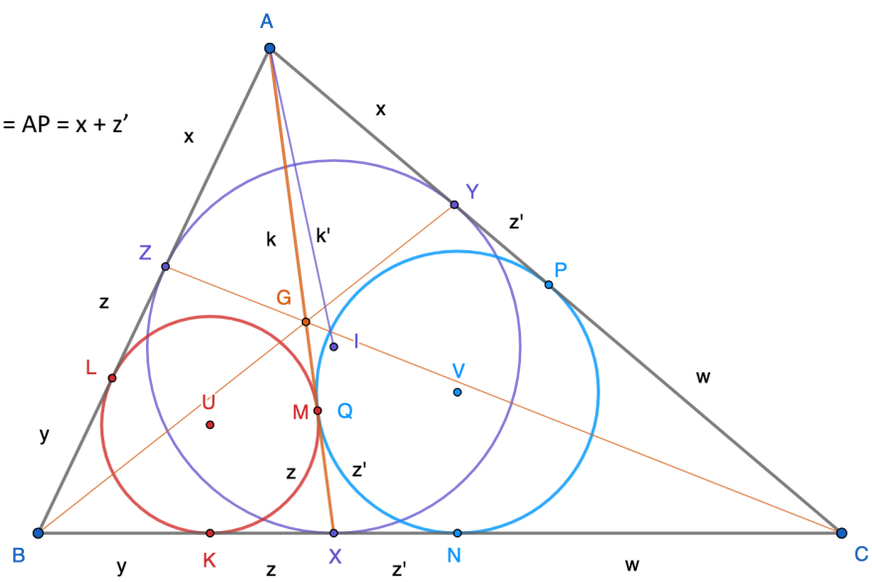
Der *Tangentenabschnittssatz* ergibt
9 Längengleichungen:

AZ = AY = x AL = AM = x + z AQ = AP = x + z'

BL = BK = y BZ = BX = y + z

CN = CP = w CX = CY = w + z'

XM = XK = z XQ = XN = z'



Wir haben:

AX = AM + MX = AQ + QX [1]
AM = AL = x + z [2]
AQ = AP = x + z' [3]

[2] & [3] in [1] x + z + z = x + z' + z'
x + 2z = x +2z'
2z = 2z'
z = z'

Folglich ist XM = XQ und M = Q

QED

Analog haben wir : **die Inkreise von BCY und BAY berühren einander;**
die Inkreise von CAZ und CBZ berühren einander.

AX, BY und CZ schneiden sich immer in einem Punkt: der Gergonne Punkt.

Troisième exemple de chasse aux tangentes

Le théorème de Pitot - qui suit.

Quatrième exemple de chasse aux tangentes

Voir la démonstration #1 du théorème de Feuerbach.

THÉORÈME DE PITOT – SATZ VOM TANGENTENVIERECK

Henri de Pitot – ingénieur français, 1695-1771.

Ein **Tangentenviereck** ist ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind.
Diesen Kreis nennt man den Inkreis des Tangentenvierecks.

Besondere Tangentenvierecke: Quadrat, Drachen, Raute.

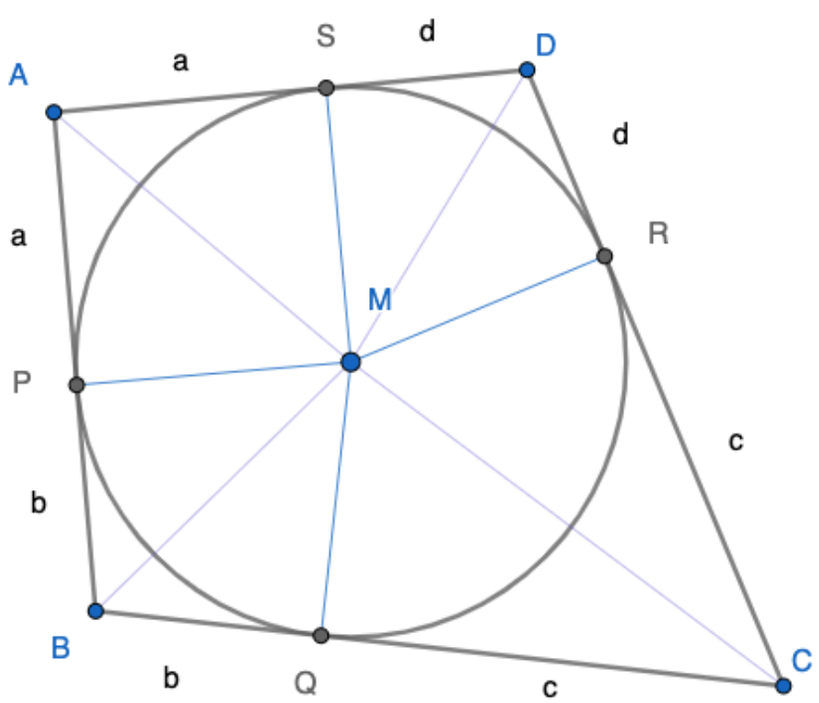
In einem Tangentenviereck ABCD gilt: AB + CD = BC + DA

Beweis

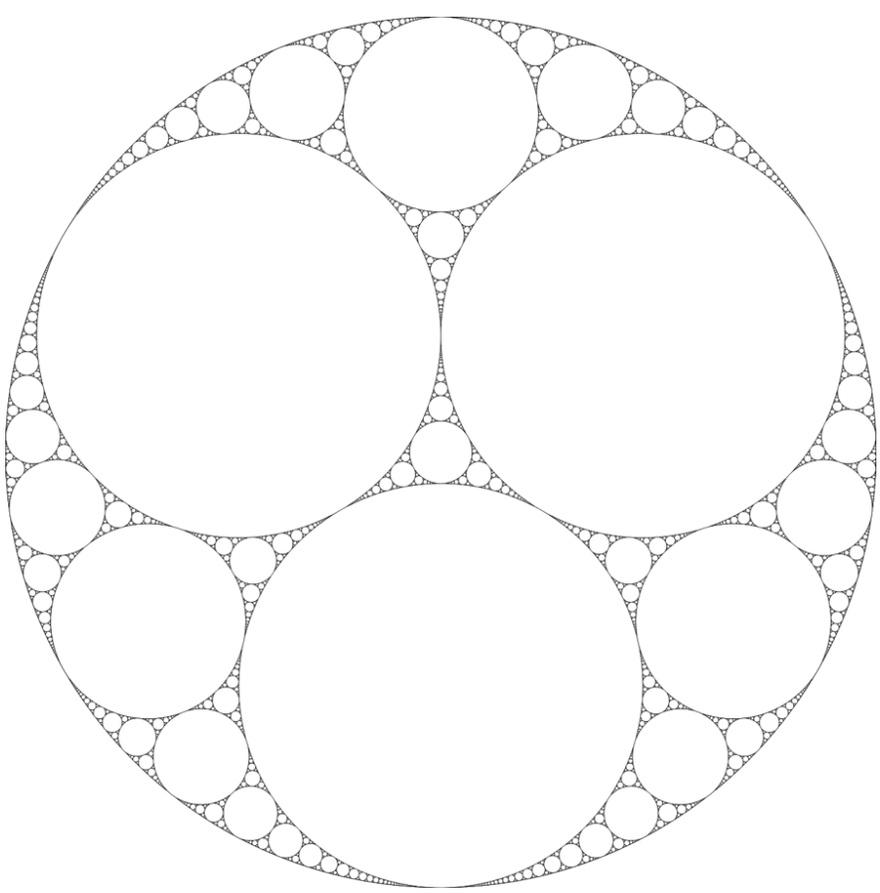
Wir gehen auf Tangentenjagd:
AS = AP = a
BP = BQ = b
CQ = CR = c
DR = DS = d

AB + CD = AP + PB + CR + RD = a + b + c + d [1]
BC + DA = BQ + QC + DS + SA = b + c + d + a [2]
[1] & [2] AB + CD = BC + DA *QED*

Die Umkehrung des Satzes gilt ebenfalls:
Wenn in einem konvexen Viereck ABCD die Gleichung AB + CD = BC + DA erfüllt ist, so ist es auch ein Tangentenviereck.



GÉOMÉTRIE DU CERCLE



DÉFINITIONS ET VOCABULAIRE

Le **cercle** est le **lieu** des points équidistants d'un point fixe.

Le point fixe est le **centre du cercle** et la distance, le **rayon** (mesure) = r.

Un **rayon** = **Radius** (segment) est un segment joignant le centre à un point du cercle.

Sa longueur est également appelée rayon. Pareil en allemand.

Une **corde** = **Sehne** est un segment de droite dont les extrémités se trouvent sur le cercle.

Un **diamètre** est une corde passant par le centre. C'est un segment de droite qui délimite le disque en deux parts égales. Le diamètre est composé de deux rayons colinéaires.

Sa longueur, également appelée **diamètre** = **Durchmesser** vaut 2r.

Un **arc** = **Kreisbogen** est une portion de cercle délimitée par deux points.

La **longueur d'un arc**, exprimée dans la même unité que le rayon, est $l = \alpha\, r$ (avec α en radian).

Un **disque** est une région du plan limitée par un cercle.

Un **secteur circulaire** est une partie du disque comprise entre deux rayons.

L'**aire d'un secteur circulaire** est $\frac{1}{2}\, \alpha\, r^2$ (avec α en radian).

Un **segment circulaire** est une partie du disque comprise entre une corde et l'arc définit par cette corde.

La **circonférence** est le périmètre du cercle et est égale à $2\pi r$

Une **sécante** est une droite qui coupe le cercle en deux points

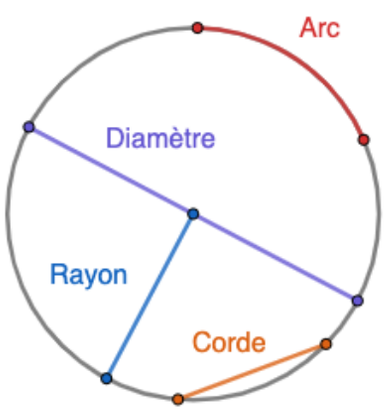
Une **tangente** est une droite qui touche le cercle en un point.

Une **passante** est une droite qui ne coupe pas le cercle (elle passe à côté)

Des angles sont **supplémentaires** si la somme de leur mesure fait 180 degrés.

Un **angle au centre** = **Mittelpunktwinkel** = **Zentriwinkel** est un angle formé par deux rayons du cercle.

Un **angle inscrit** = **Umfangswinkel** = **Peripheriewinkel** est un angle dont le sommet est sur le cercle et les côtés deux cordes.



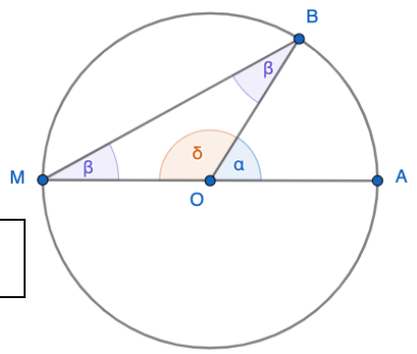
RAPPEL DE QUELQUES PROPRIÉTÉS

- La tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon aboutissant au point de tangence.
- La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.
- Par trois points non colinéaires, on peut faire passer un et un seul cercle :
  le cercle circonscrit au triangle dont les sommets sont les 3 points.

THÉORÈME DE L'ANGLE AU CENTRE
PERIPHERIE-ZENTRIWINKEL-SATZ

Relation entre les angles inscrits et les angles au centre interceptant le même arc

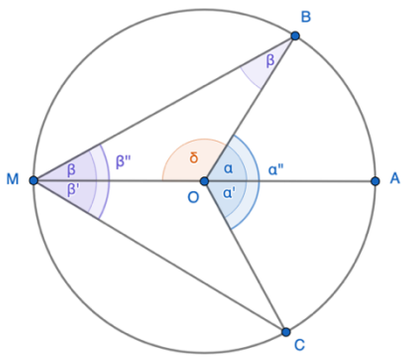
Première configuration



OA = OB = OM = rayon du cercle
OMB est isocèle donc $\delta + 2\,\beta = 180$ $\quad 180 - \delta = 2\,\beta$
$\alpha + \delta$ = l'angle plat = 180 $\quad 180 - \delta = \alpha$
Donc $\alpha = 2\beta$

L'angle au centre AOB est le double de l'angle inscrit AMB
$\alpha = 2\beta$

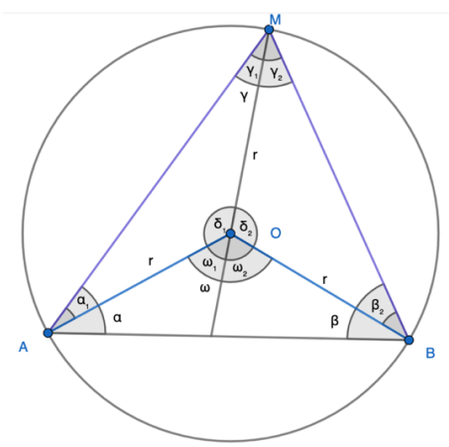
Seconde configuration



$\alpha = 2\beta$ et $\alpha' = 2\beta'$
$\alpha'' = \alpha + \alpha'$ et $\beta'' = \beta + \beta'$
$\alpha'' = 2\beta + 2\beta' = 2(\beta + \beta') = 2\beta''$

Der **Mittelpunktswinkel** (Zentriwinkel) eines Kreisbogens
ist doppelt so groß wie einer der zugehörigen **Umfangswinkel**
(Peripheriewinkel) $\alpha'' = 2\,\beta''$

Configuration générale



AOM ist ein gleichschenkliges Dreieck da OA = OM = r
Die anliegenden Winkel sind deshalb gleich groß: $\alpha_1 = \gamma_1$

Winkelsumme in AOM: $\alpha_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 180$
$\delta_1 = 180 - \alpha_1 - \gamma_1 = 180 - 2\gamma_1$ [1]

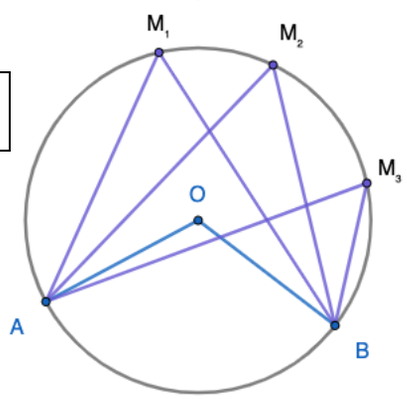
Nebenwinkel: $\delta_1 + \omega_1 = 180$
$\omega_1 = 180 - \delta_1$

[1] einsetzen: $\omega_1 = 180 - (180 - 2\,\gamma_1)$
$\omega_1 = 2\,\gamma_1$

Analog für MOB gilt: $\omega_2 = 2\,\gamma_2$

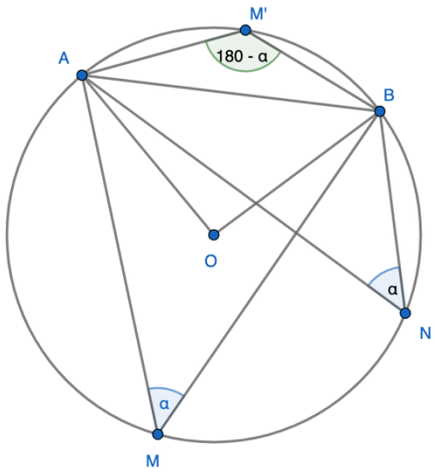
und damit $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 2\,\gamma_1 + 2\,\gamma_2 = 2\,(\gamma_1 + \gamma_2) = 2\,\gamma$

Da M beliebig auf dem Kreisbogen verschoben werden kann, gilt dieser Beweis für alle Umfangswinkel.
Damit ist auch der Beweis erbracht, dass **alle Umfangswinkel über derselben Sehne AB gleich sind**.



L'angle au centre *AOB* est le double des angles inscrits *AMiB*.
Les angles *AMiB* sont tous égaux.

THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT
UMKEHRUNG DES UMFANGSWINKELSATZES



Soit un cercle de centre O ;
A, B, M, M' quatre points de ce cercle,
avec M et O du même côté de (AB) et M' de l'autre côté de (AB).

Un point N quelconque du plan est sur le cercle *C ssi*
N et M sont du même côté de (AB) et *ANB = AMB*
ou
N et M' sont de part et d'autre de (AB) et *ANB* = 180 – *AM'B*

D'où vient ce 180 ???
C'est expliqué juste en dessous.

DAS SEHNENVIERECK – QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

Un quadrilatère est **inscriptible** si ses sommets sont cocycliques.

Ein **Sehnenviereck** ist ein Viereck dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, dem Umkreis des Vierecks.
Alle Seiten des Sehnenvierecks sind Sehnen des Umkreises.

Diese Definition schließt auch überschlagene Vierecke ein.
Hier betrachten wir aber stets konvexe Sehnenvierecke.

WINKELSATZ
Dans tout quadrilatère inscriptible, les angles opposés sont supplémentaires :
$\alpha = 180 - \gamma$ ετ $\beta = 180 - \delta$

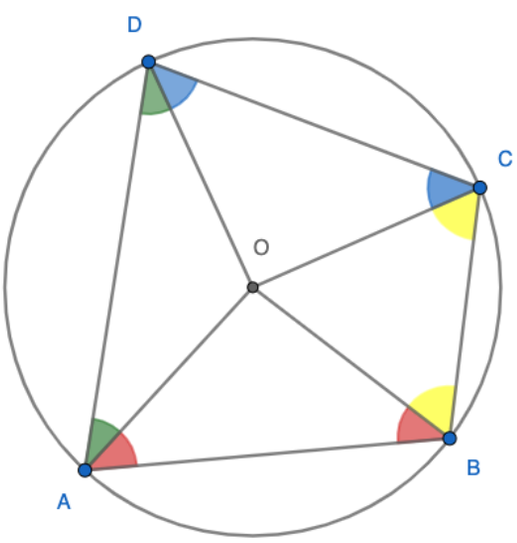
Démonstration

Le triangle OAB est isocèle et ses 2 angles rouges sont égaux
Le triangle OBC est isocèle et ses 2 angles jaunes sont égaux
Le triangle OCD est isocèle et ses 2 angles bleus sont égaux
Le triangle ODA est isocèle et ses 2 angles verts sont égaux

Somme des angles intérieurs de ABCD = 2 rouge + 2 jaune + 2 bleu + 2 vert = 360
Donc rouge + jaune + bleu + vert = 180

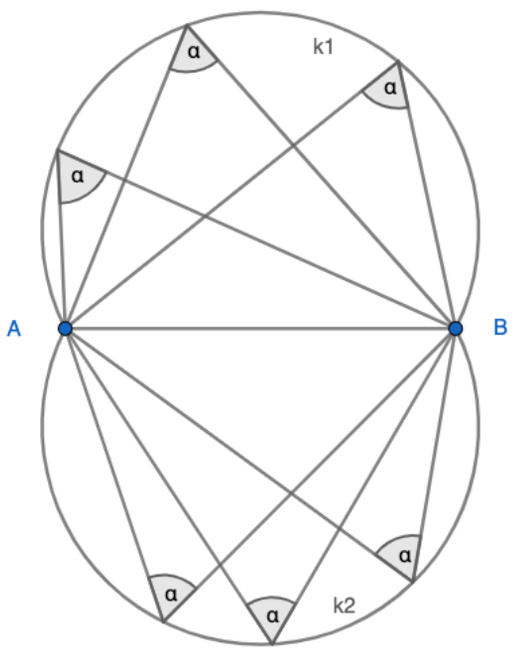
Par ailleurs $\alpha + \gamma$ = vert + rouge + jaune + bleu
et $\beta + \delta$ = rouge + jaune + bleu + vert

Donc $\alpha = 180 - \gamma$ et $\beta = 180 - \delta$



Der **geometrische Ort** aller Punkte, welche Scheitelpunkte
von Winkeln fester gegebener Größe α über einer Strecke AB sind,
• ist für α = 90 der Kreis mit Durchmesser AB.
• besteht für α ≠ 90 aus genau zwei verschiedenen Kreisbögen k_1 und k_2 mit diesem Winkel α als Umfangswinkel und mit der Strecke AB als Sehne, die spiegelsymmetrisch zur Geraden AB sind.

Die beiden Kreisbögen heißen **Fasskreisbögen** zur Sehne AB und Winkel α.



TECHNIQUE DE LA CHASSE AUX ANGLES - WINKELJAGD

Des points appartenant à un même cercle sont dits **cocycliques**.

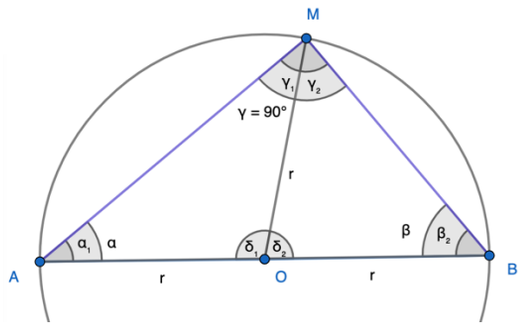
Le théorème de l'angle inscrit permet
- de montrer que quatre points sont cocycliques en connaissant des égalités d'angles ;
- de montrer que des angles sont égaux (ou supplémentaires) en sachant que des points sont cocycliques.

En montrant que des angles sont égaux ou supplémentaires, on peut donc trouver des points cocycliques, et déduire d'autres relations entre les angles de ces points, qui nous permettent de trouver encore plus de points cocycliques, donc encore plus d'angles...

Cette technique appelée **chasse aux angles** est avec celle de la chasse aux tangentes une méthode très puissante de résolution des problèmes de géométrie.

CAS PARTICULIER - THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT DANS UN DEMI-CERCLE
SATZ DES THALES

Ein wichtiger Sonderfall liegt vor, wenn der gegebene Kreisbogen ein Halbkreis ist:
Dann ist der Mittelpunktswinkel ein gestreckter Winkel, während die Umfangswinkel *rechte Winkel* sind.

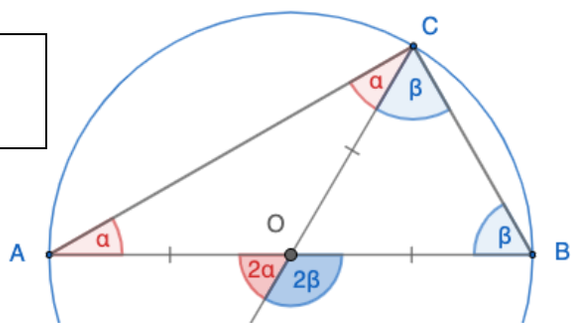


Damit erweist sich der **Satz des Thales** als Spezialfall des Umfangswinkelsatzes.

Attention : le théorème de Thalès et le Satz des Thales réfèrent à des théorèmes différents en France et en Allemagne.

Dans ce livre le théorème auquel je réfère dépend de la langue dans laquelle une démonstration est écrite.

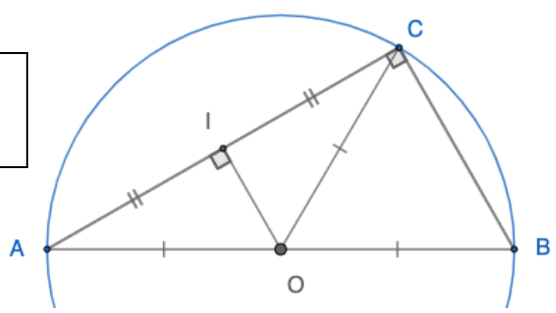
Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [AB], c'est-à-dire que le point C appartient également à ce cercle, alors le triangle est rectangle en C.



Démonstration directe

Le sommet C est sur le cercle de diamètre [AB] :
2α + 2β = l'angle plat = 180, donc α + β = l'angle droit = 90

Réciproque - Umkehrung
si ABC est un triangle rectangle en C alors le triangle s'inscrit dans un cercle de diamètre l'hypoténuse [AB].



Démonstration

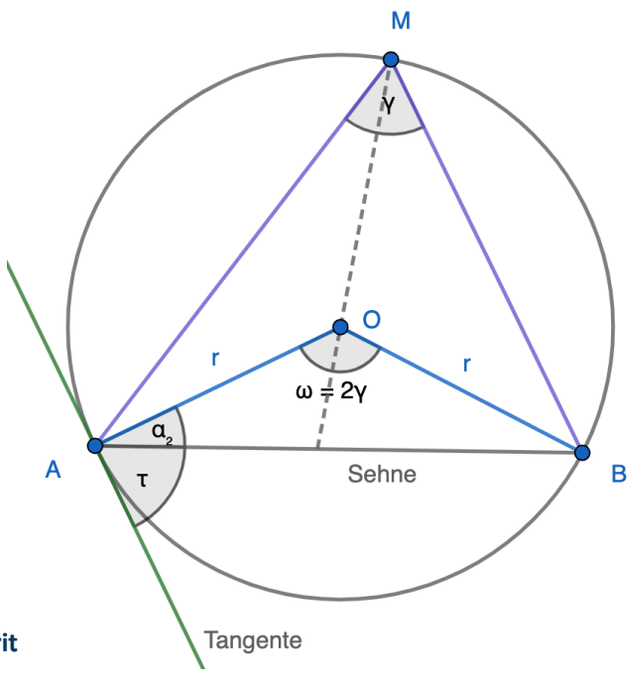
Par le théorème de Thalès, la droite passant
par le milieu O du segment [AB] et le milieu I du segment [AC]
(**droite des milieux**) est parallèle à la droite (BC).
Comme les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires, il en est de même des droites (AC) et (OI).
(OI) passe par le milieu de [AC], est perpendiculaire à (AC), c'est donc la médiatrice de A et C, d'où OA = OC.
O étant milieu de [AB], OA = OC = OB.
Le point O est bien le centre du cercle circonscrit au triangle qui a pour diamètre [AB].

SEHNEN-TANGENTENWINKEL-SATZ

Par le théorème de l'angle inscrit : $\omega = 2\gamma$
AOB est isocèle
La somme de ses angles est $180 = \omega + 2\,\alpha_2$
$\alpha_2 = (180 - \omega) / 2$
$\alpha_2 = 90 - \gamma$

La tangente est perpendiculaire
au rayon OA donc $\tau + \alpha_2 = 90$
$\tau = 90 - \alpha_2$
$\tau = 90 - (90 - \gamma)$
$\tau = \gamma$

$$\tau = \gamma$$

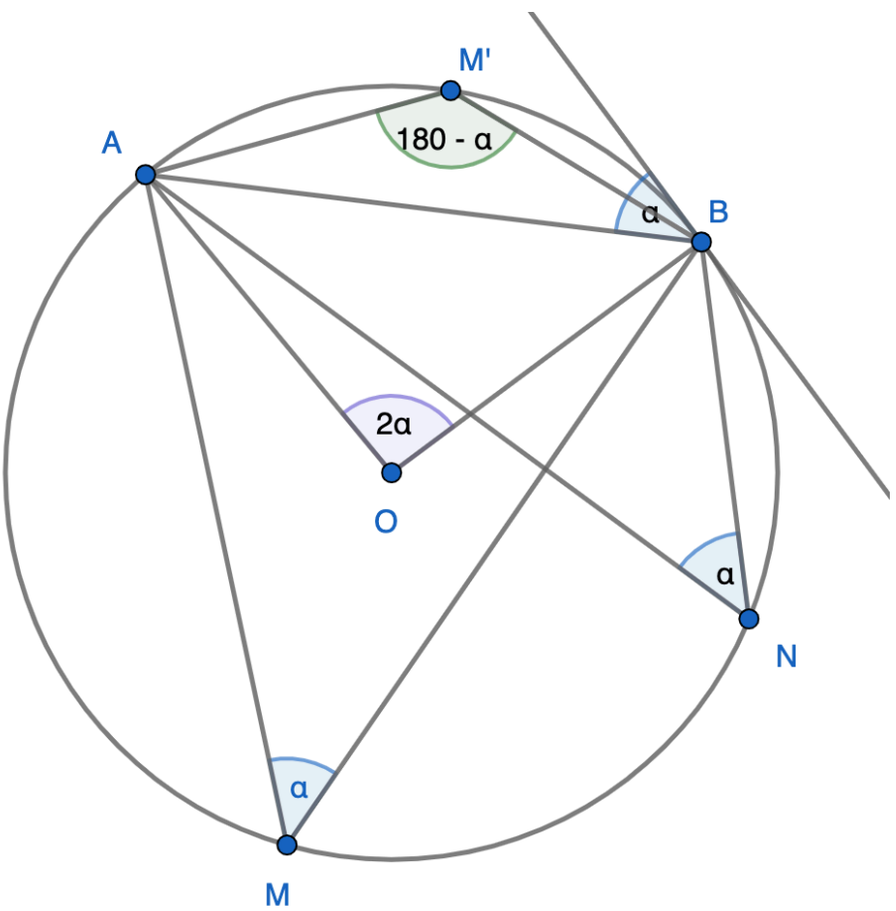


γ = Umfangswinkel / Peripheriewinkel / angle inscrit

ω = Mittelpunktswinkel / Zentriwinkel / angle au centre

τ = Sehnentangentenwinkel

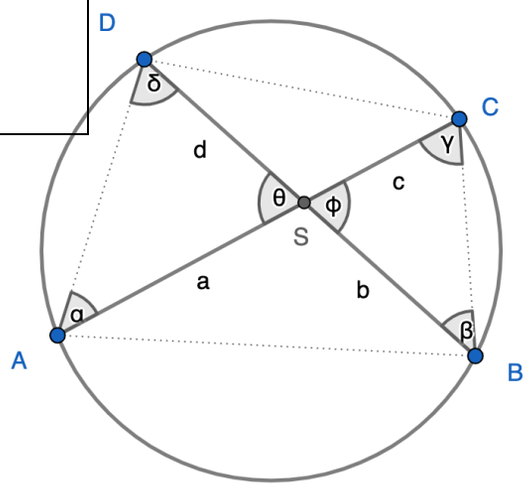
UNE FIGURE FONDAMENTALE À SE RAPPELER ABSOLUMENT QUI RÉSUME LES 5 DERNIÈRES PAGES



SEHNENSATZ

Schneiden zwei Sehnen eines Kreises einander,
so ist das Produkt der jeweiligen Sehnenabschnitte gleich:
ac = bd oder a/d = b/c

Umgekehrt: wenn für die Diagonalen eines Vierecks
ac = bd gilt, dann besitzt dieses Viereck einen Umkreis.



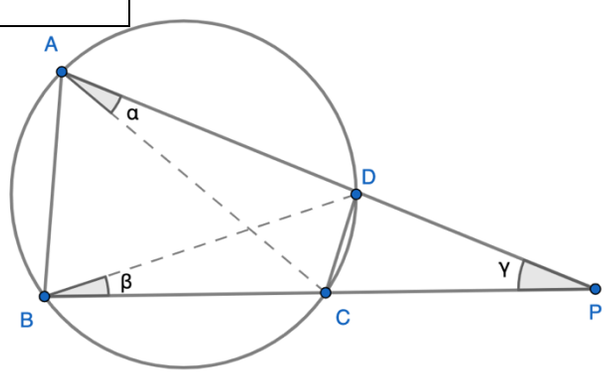
Beweis

1) Die Scheitelwinkel in S sind gleich groß: $\theta = \phi$
2) Die Umfangswinkel über Sehne AB sind gleich groß: $\delta = \gamma$
3) Die Umfangswinkel über Sehne CD sind gleich groß: $\alpha = \beta$
Nach W:W:W sind also ASD und BSC ähnlich.

Daraus ergibt sich die Verhältnisgleichung a/d = b/c
und umgewandelt a·c = b·d

SEKANTENSATZ

Schneiden zwei Sekanten einander außerhalb des Kreises, so gilt: AP.DP = BP.CP oder AP / BP = CP / DP



Beweis

1) Gemeinsamer Winkel γ in P
2) Die Umfangswinkel α und β über der Sehne CD
sind gleich groß: $\alpha = \beta$
Nach W:W:W sind also APC und BPD ähnlich.

Daraus ergibt sich die Verhältnisgleichung AP/BP = CP/DP
und umgewandelt AP.DP = BP.CP

SEKANTEN-TANGENTEN-SATZ

Sei ein Kreis mit einer Sekante g und einer Tangente t, die sich außerhalb des Kreises in P schneiden. Seien G_1 bzw. G_2 die Schnittpunkte des Kreises mit g; sei T der Berührungspunkt der Tangente.
So gilt: **$PG_1 . PG_2 = PT^2$**

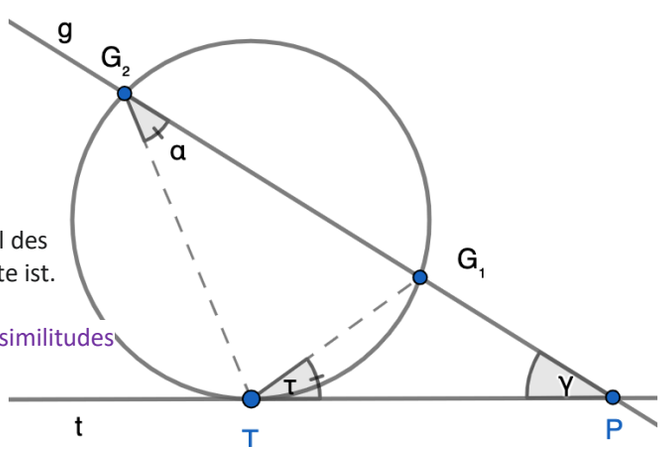
Beweis

1) Sehnen-Tangenten Winkelsatz: $\alpha = \tau$
2) γ ist ein Winkel beider Dreiecke
Nach W:W:W sind also PTG_2 und PTG_1 ähnlich.

Daraus ergibt sich $PT / PG_2 = PG_1 / PT$

Der Sekanten-Tangenten-Satz beschreibt einen Spezialfall des Sekantensatzes, bei dem die zweite Sekante eine Tangente ist.

Comment se rappeler ou retrouver de tout ça ? Il y a des similitudes partout.

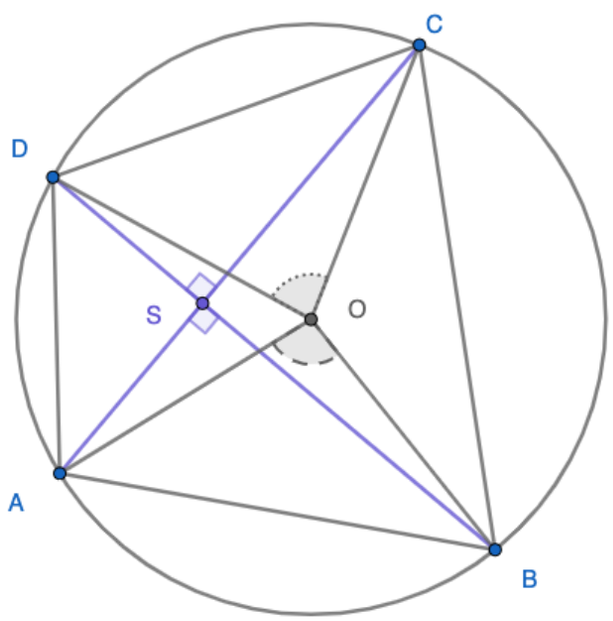


SATZ ÜBER SUPPLEMENTARE WINKEL IM SEHNENVIERECK

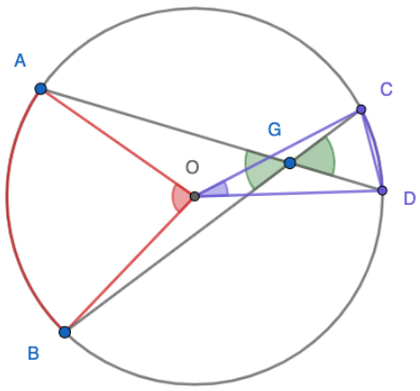
Sei O der Mittelpunkt des Umkreises in einem Sehnenviereck ABCD; e und f seine Diagonalen.
Wenn $e \perp f$ dann $AOB + COD = 180$ (AOB & COD sind supplementär)

Sei S der Schnittpunkt von e und f.

Peripheriewinkelsatz über die Sehne AB:	$AOB = 2\,ACB = 2\,SCB$	[1]
Peripheriewinkelsatz über die Sehne CD:	$COD = 2\,CBD = 2\,CBS$	[2]
[1] + [2]	$AOB + COD = 2\,(SCB + CBS)$	[3]
Innenwinkelsumme in CSB :	$SCB + CBS + BSC = 180$	
Nach Voraussetzung ist BCS rechtwinklig	$SCB + CBS + 90 = 180$	
	$SCB + CBS = 90$	[4]
[3] & [4]	$AOB + COD = 2.90 = 180$	
	QED	



ANGLE INTÉRIEUR – ANGLE EXTÉRIEUR



Un **angle intérieur** est un angle
dont le sommet est à l'intérieur du cercle
et les côtés sont sur les sécantes.

$$\mathbf{AGB = DGC = \tfrac{1}{2}\,(AOB + DOC)}$$

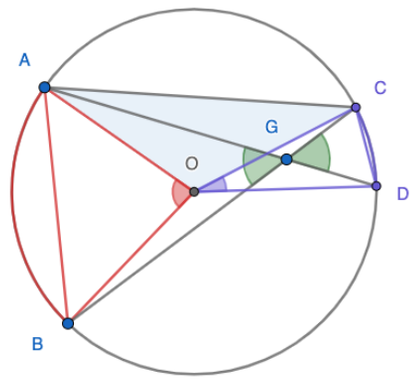
Démonstration

AGB = *DGC*
Somme des angles dans AGC :
GAC + *GCA* + *CGA* = 180
GAC + *GCA* = 180 - *CGA* = *DGC* = ***AGB*** [1]

Théorème de l'angle inscrit sur CD : *DAC* = ½ *DOC*
Or *GAC* = *DAC* car D, G, A sont alignés donc *GAC* = ½ *DOC* [2]

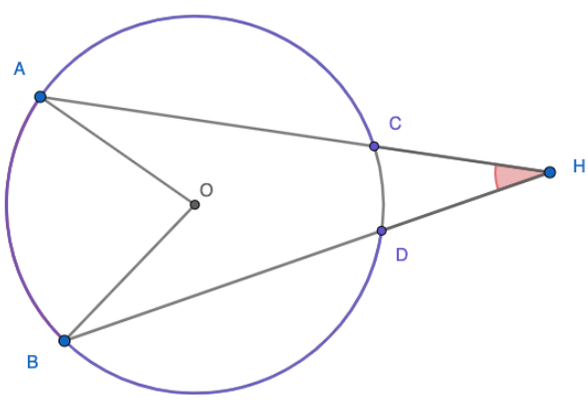
Théorème de l'angle inscrit sur AB : *BCA* = ½ *AOB*
Or *GCA* = *BCA* car B, G, C sont alignés donc *GCA* = ½ *AOB* [3]

Alors ***AGB*** = *GAC* + *GCA* = **½ (*AOB* + *DOC*)**
QED



Un **angle extérieur** est un angle
dont le sommet est à l'extérieur du cercle
et les côtés sont sur les sécantes.

$$\mathbf{AHB = \tfrac{1}{2}\,(AOB - DOC)}$$



Démonstration

Somme des angles dans ADH : *HDA* + *DAH* + *AHD* = 180
Or HDA + *ADB* = 180 ou *HDA* = 180 - *ADB*
Donc 180 - *ADB* + *DAH* + *AHD* = 180
AHD = *ADB* - *DAH*
Or ***AHB*** = *AHD* car B, D, H sont alignés donc ***AHB*** = *ADB* - *DAH* [1]

Théorème de l'angle inscrit sur CD : *DAC* = ½ *DOC*
Or *DAC* = *DAH* car A, C, H sont alignés donc *DAH* = ½ *DOC* [2]

Théorème de l'angle inscrit sur AB : *ADB* = ½ *AOB*

[2] et [3] dans [1] ***AHB*** = **½ (*AOB* - *DOC*)**
QED

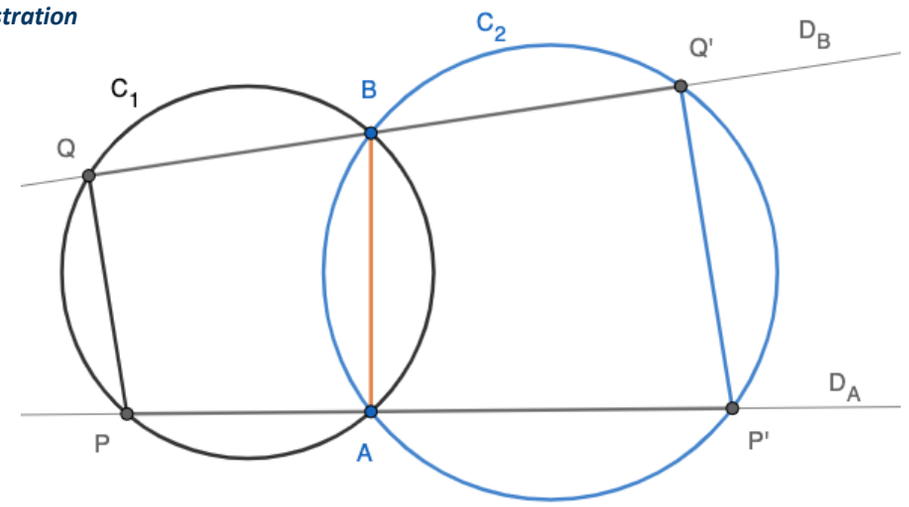
THEORÈME DES 2 CERCLES DE REIM

Anton Reim – géomètre sudète (Bohème), 1832-1922

Soient 2 cercles C_1 et C_2 sécants en A et B.
Soit D_A une droite passant par A. Elle coupe C_1 en P et C_2 en P'.
Soit D_B une droite passant par B. Elle coupe C_1 en Q et C_2 en Q'.

Alors PQ // P'Q'

Démonstration



Démonstration

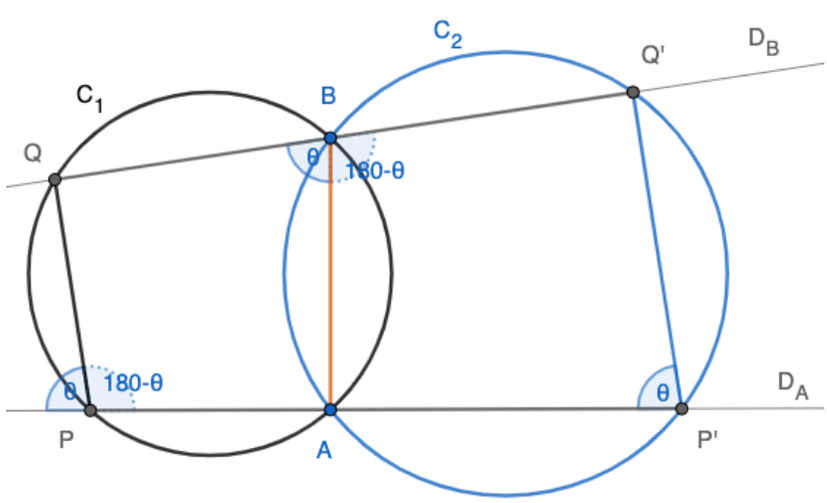
Soit $Q'P'A = \theta$ [1]

Théorème de l'angle inscrit dans C_2 sur la corde AQ' :	$ABQ' = 180 - \theta$
QBA est supplémentaire à ABQ'	$QBA = \theta$
Théorème de l'angle inscrit dans C_1 sur la corde AQ :	$APQ' = 180 - QBA = 180 - \theta$
Angle à gauche de P est supplémentaire à APQ	Angle à gauche de P = θ [2]

[1] & [2] : **(PQ) // (P'Q')**

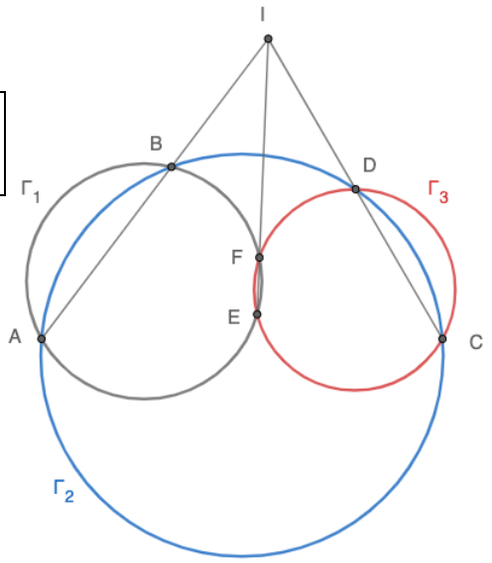
QED

La démonstration est réversible : le théorème l'est aussi.



THÉORÈME DES TROIS CERCLES DE MONGE

Lorsque trois cercles sont sécants deux à deux,
les trois droites d'intersection sont concourantes.



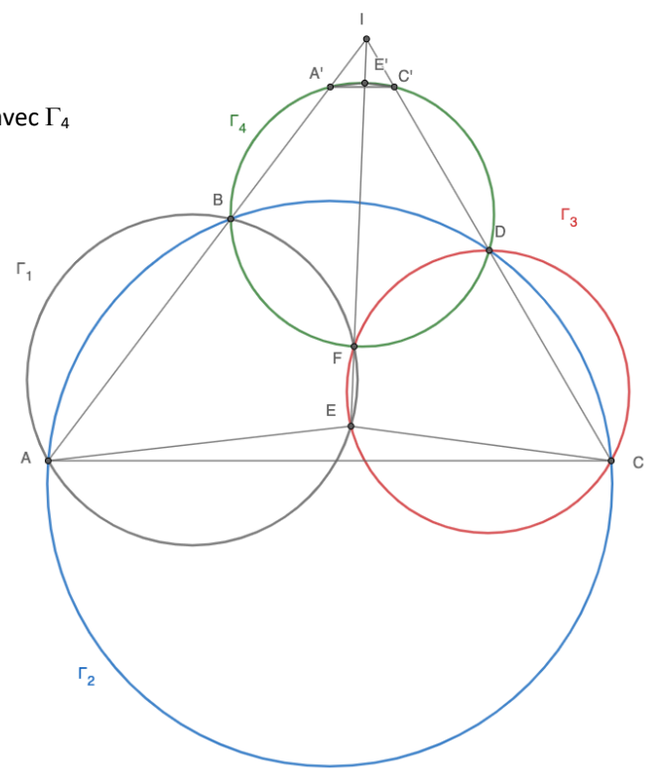
Nous allons montrer une autre formulation.

Soient
Γ_1, Γ_2 deux cercles sécants
A, B les points d'intersection de Γ_1 et Γ_2
C, D deux points de Γ_2
E, F deux points de Γ_1
I le point d'intersection de (AB) et (CD).

Si C, D, E, F sont cocycliques *alors* (EF) passe par I.

Démonstration

Notons
Γ_3 le cercle passant par C, D, E, F
Γ_4 le cercle passant par B, F, D
A', C', E' les seconds points d'intersection de (AB), (CD), (EF) avec Γ_4



On applique le théorème de Reim aux cercles Γ_2 et Γ_4,
aux points de base B et D, aux moniennes (ABA') et (CDC') :
(AC) // (A'C')

On applique le théorème de Reim aux cercles Γ_3 et Γ_4,
aux points de base D et F, aux moniennes (CDC') et (EFE') :
(CE) // (C'E')

On applique le théorème de Reim aux cercles Γ_1 et Γ_4,
aux points de base B et F, aux moniennes (ABA') et (EFE') :
(EA) // (E'A')

Alors EAC et E'A'C' sont semblables et homothétiques.
On applique la réciproque du théorème faible de Desargues :
(EE') passe par I.

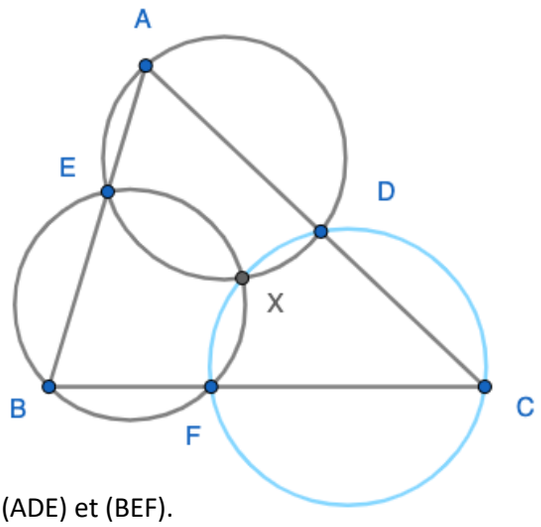
E' étant sur (EF), (EF) passe par I.

Ce qui est équivalent à l'énoncé de Monge :
lorsque trois cercles sont sécants deux à deux,
les trois droites d'intersection sont concourantes.

QED

THÉORÈME DES 3 CERCLES DE MIQUEL

Auguste Miquel - mathématicien français, 1816-1851



Soit ABC un triangle *quelconque*
et D, E, F des point *quelconques* sur AC, AB et BC respectivement.
Alors les cercles circonscrits aux triangles ADE, BEF et CDF passent par un point commun.

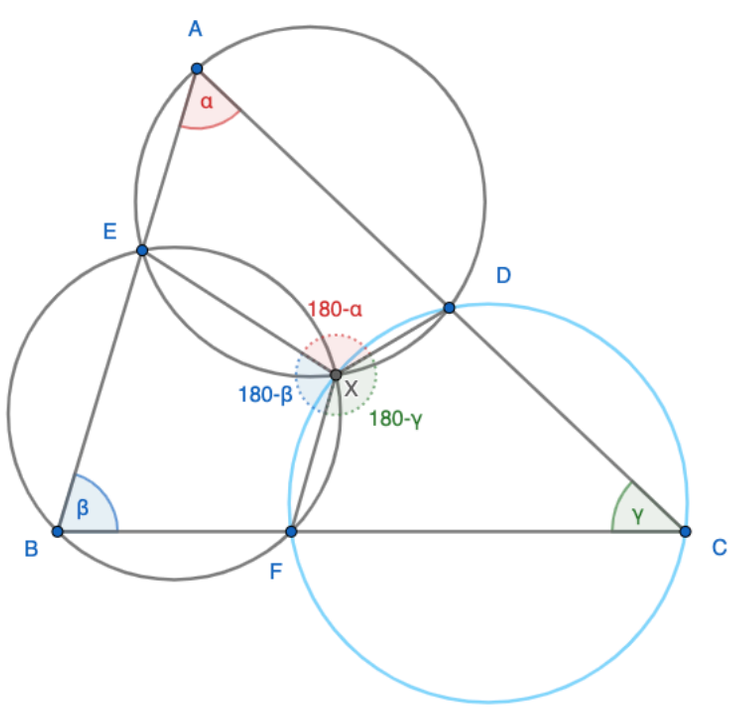
Démonstration

Les points A, B, C, D, E et F étant donnés, on trace les cercles (ADE) et (BEF).
X est le point d'intersection de ces deux cercles - autre que E.
On veut prouver que X appartient alors aussi au cercle (CDF).

On part à la chasse aux angles en utilisant le théorème de l'angle inscrit.

Théorème de l'angle inscrit dans (ADE) :	$\alpha = 180 - DXE$	[1]
Théorème de l'angle inscrit dans (BEF) :	$\beta = 180 - EXF$	[2]
[1] + [2]	$\alpha + \beta = 360 - DXE - EXF$	[3]
Somme des 3 angles en X	$360 = DXE + EXF + FXD$	[4]
Réarrangement des termes de [4]	$FXD = 360 - DXE - EXF$	[5]
[3] & [5]	$FXD = \alpha + \beta$	[6]
Somme des angles du triangle ABC	$180 = \alpha + \beta + \gamma$	[7]
Réarrangement des termes de [7]	$180 - \gamma = \alpha + \beta$	[8]
[6] & [8]	$FXD = 180 - \gamma$	

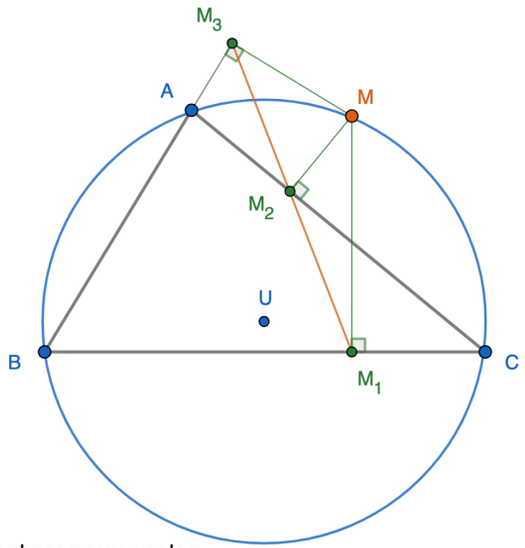
C'est le théorème de l'angle inscrit dans (CDF)
Donc X appartient au cercle (CDF).
Yeah ! Oops – je voulais dire : *QED*



LA DROITE DE SIMSON

Robert Simson - mathématicien écossais, 1687-1768

Soient ABC un triangle quelconque et
M un point sur son cercle circonscrit.
Soient M_1, M_2, M_3 les projetés de M sur BC, AC et AB.
Alors M_1, M_2, M_3 sont alignés sur la droite de Simson**.**



Soit $\delta_1 = AM_2M_3$ et $\delta_2 = M_1M_2C$
Une condition suffisante pour prouver l'alignement
est de montrer que $\delta_1 = \delta_2$. C'est ce que nous allons faire.

On introduit l'angle ε qui permet d'identifier la position de M sur le cercle circonscrit . Soit $\varepsilon = MBA$
On va chercher à exprimer δ_1 et δ_2.en fonction de α, β, γ, ε par chasse aux angles.

$BM_1M = 90$; $BM_3M = 90$; $AM_2M = 90$ donc

M_1 et M_3 sont sur le cercle de Thalès de diamètre BM : B M_1 M M_3 sont cocycliques.
Théorème de l'angle inscrit sur la corde BC : $BAC = BMC = \alpha$

M_2 et M_3 sont sur le cercle de Thalès de diamètre AM : A M_2 M M_3 sont cocycliques.
Théorème de l'angle inscrit sur la corde AM_3 : $M_3M_2A = \delta_1 = M_3MA$ [1]
Théorème de l'angle inscrit sur la corde AB : $ACB = \gamma = AMB$ [2]
Théorème de l'angle inscrit sur la corde AM : $MBA = \varepsilon = MCA$ [3]
Théorème de l'angle inscrit sur la corde M_2M_3 : $M_3MM_2 = 180 - M_3AB = 180 - (\beta + \gamma) = \alpha$ [4]

En regardant la figure on a $M_3MA = M_3MM_2 - BMM_2 - AMB$ [5]

$M_2AM_3 = 180 - \alpha = \beta + \gamma$
$M_3MM_2 = 180 - M_2AM_3 = \alpha$ [6]

Somme des angles de BMM_3 : $BMM_3 = 90 - \varepsilon$
En regardant la figure : $BMM_2 = M_3MM_2 - BMM_3 = \alpha - (90 - \varepsilon)$ [7]

[1] & [5] $\delta_1 = M_3MM_2 - BMM_2 - AMB$
[4],[7] & [2] $\delta_1 = \alpha - (\alpha - (90 - \varepsilon)) - \gamma$
$\delta_1 = 90 - \varepsilon - \gamma$ [8]

M_1 et M_2 sont sur le cercle de Thalès de diamètre CM : C M_1 M_2 M sont cocycliques.
Théorème de l'angle inscrit sur la corde CM_2 : $CM_1M_2 = 180 - M_2MC$ [9]

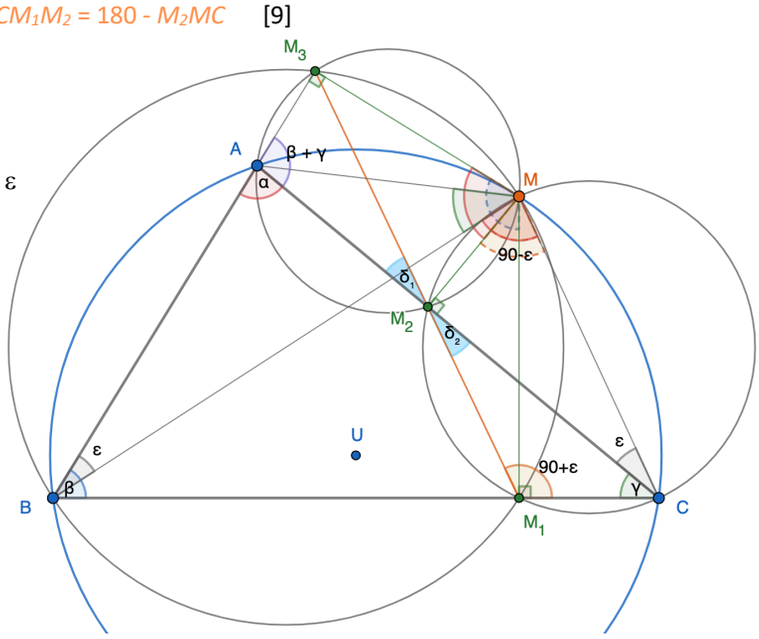
[3] & somme des angles dans CMM_2
$M_2MC + 90 + \varepsilon = 180$
$M_2MC = 90 - \varepsilon$ [10]

[9] & [10] $CM_1M_2 = 180 - (90 - \varepsilon) = 90 + \varepsilon$

Somme des angles dans CM_1M_2
$\delta_2 + \gamma + CM_1M_2 = 180$
$\delta_2 = 180 - \gamma - (90 + \varepsilon)$
$\delta_2 = 90 - \varepsilon - \gamma$ [11]

[8] & [11] $\delta_1 = \delta_2$

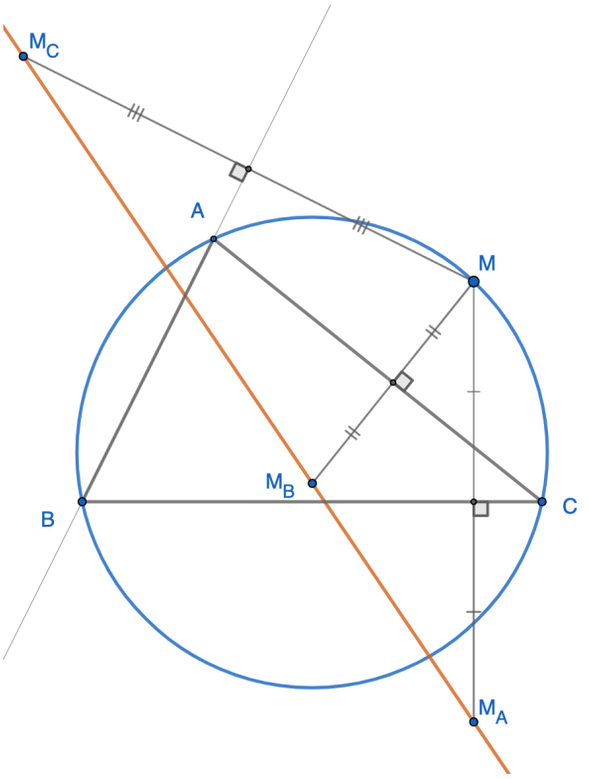
QED



LA DROITE DE STEINER

Jakob Steiner - mathématicien suisse, 1796-1863

Soient ABC un triangle quelconque et
M un point sur son cercle circonscrit.
Soient M_A, M_B, M_C les symétriques de M
par rapport à BC, AC et AB.
Alors M_A, M_B, M_C sont alignés sur la droite de Steiner**.**



Démonstration

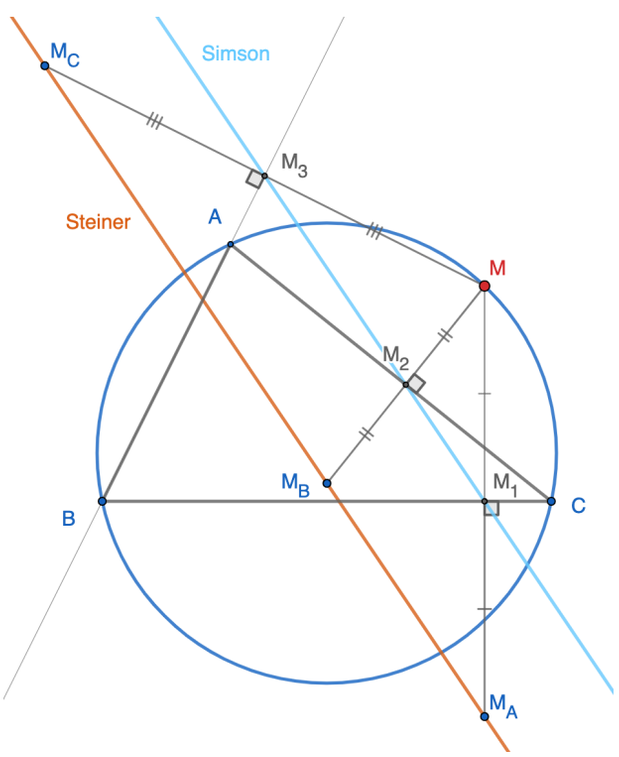
Celle-ci est beaucoup plus simple :

Rajoutons la droite de Simson à la figure.

On a alors :
$MM_A = 2\,MM_1$
$MM_B = 2\,MM_2$
$MM_C = 2\,MM_3$

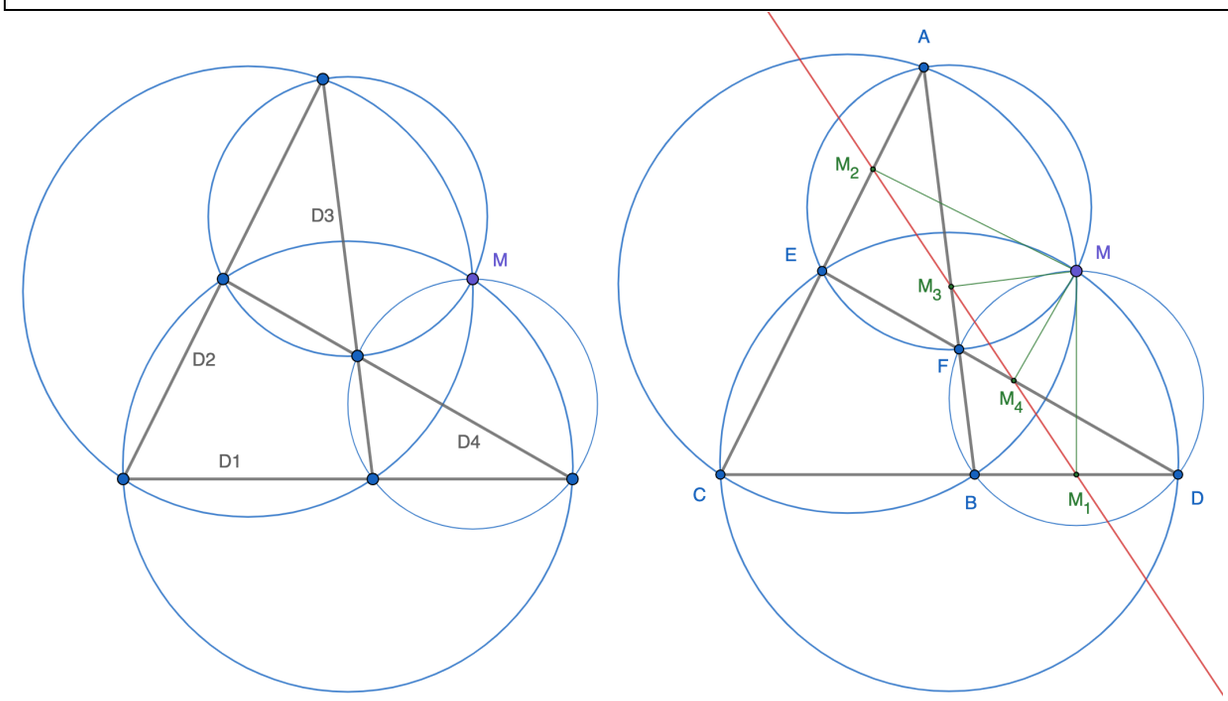
M_A, M_B, M_C sont donc les images de M_1, M_2, M_3 par une homothétie de centre M et de rapport 2.
Les homothéties conservant les colinéarités et les points M_1, M_2, M_3 étant alignés sur la droite de Simson, c'est que M_A, M_B, M_C sont aussi alignés.

QED



LE POINT DE MIQUEL - THEORÈME DES 4 CERCLES DE MIQUEL

Soient quatre droites qui définissent quatre triangles, un pour chaque choix des 3 droites parmi les 4.
Alors les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles ont un point commun
appelé **point de Miquel** du quadrilatère complet.



On appelle **quadrilatère complet** la figure formée par 6 points AECBDF où ABC est un triangle et DEF une transversale de ce triangle.

Les cercles (BCA) et (BDF) ne sont pas tangents en B. Ils se coupent en 2 points B et M.
Soit M_1, M_2, M_3, M_4 les projetés de M sur (BC), (AC), (AB), (DE).

En utilisant le théorème de la droite de Simson dans ABC puis dans DBF :
Comme M appartient au cercle circonscrit de ABC : M_1, M_2, M_3 sont alignés.
Comme M appartient au cercle circonscrit de DBF : M_1, M_3, M_4 sont alignés.

Donc M_1, M_2, M_3, M_4 sont alignés sur la **droite de Miquel**.
Donc M appartient aussi aux cercles circonscrits des triangles AEF et CDE.

QED

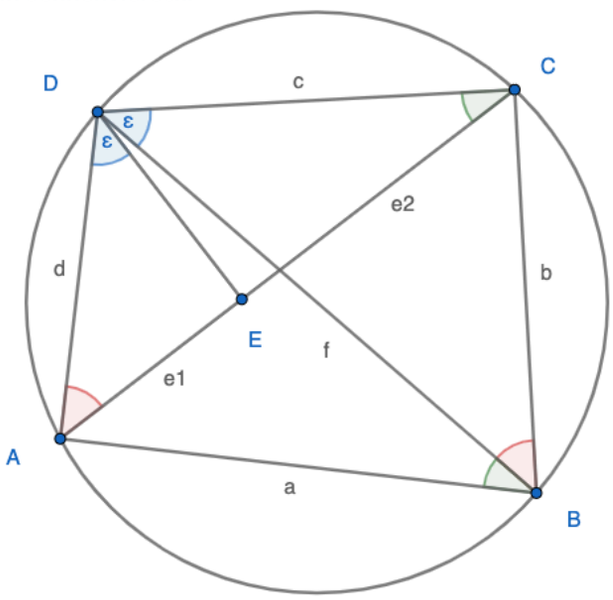
THÉORÈME DE PTOLÉMÉE

Ptolémée - mathématicien grec, ~ 100-170

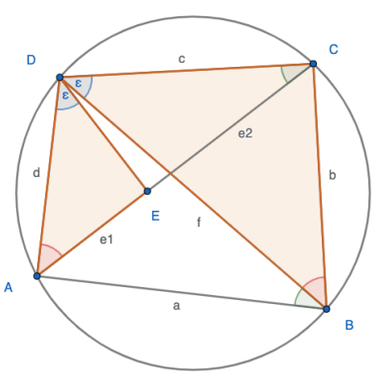
Un quadrilatère est inscriptible si le produit des longueurs de ses diagonales est égal à la somme du produit des longueurs des côtés opposés – et inversement.

In einem konvexen Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seitenlängen gleich dem Produkt der Diagonalenlängen: e.f = a.c + b.d

Der Satz ist umkehrbar:
Gilt in einem Viereck die Beziehung ef = ad + bc so liegen die Eckpunkte des Vierecks auf einem Kreis und das Viereck ist ein Sehnenviereck.

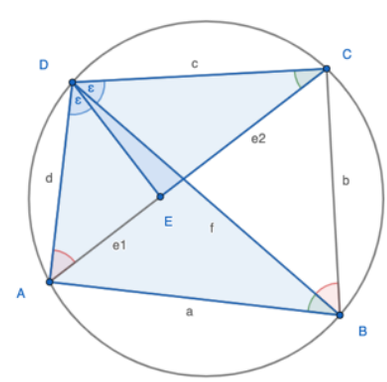


Beweis



Sei E der Hilfspunkt auf AC so dass *ADE* = *BDC* = ε [1]
E coupe AC de longueur e en segments de longueur e_1 et e_2.
Nach dem Peripheriewinkelsatz über die Sehne CD
haben wir *CAD* = *CBD* (rote Winkeln) [2]

[1] & [2] Nach dem W:W:W Satz : **AED ~ BCD**
Dann gelten die Seitenverhältnisse $e_1/d = b/f$
Umgeformt: $e_1 f = bd$ [3]



EDC = ε + *EDB* = *ADB* [4]
Nach dem Peripheriewinkelsatz über die Sehne AD
haben wir *DCE* = *DBA* (grüne Winkel) [5]

[4] & [5] Nach dem W:W:W Satz : **ADB ~ EDC**
Dann gelten die Seitenverhältnisse $e_2/c = a/f$
Umgeformt: $e_2 f = ac$ [6]

[3] + [6] $e_1 f + e_2 f = ac + bd$

$e_1 + e_2 = e$ $ef = ac + bd$

QED

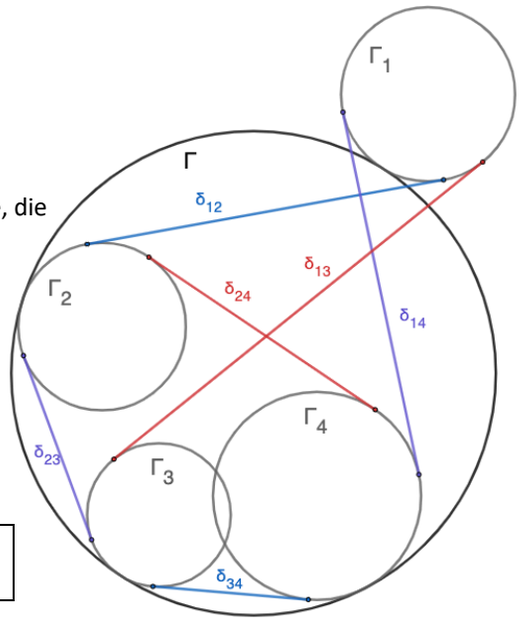
THÉORÈME DE CASEY

John Casey – mathématicien irlandais, 1820-1891

Seien Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 vier im Gegenuhrzeigersinn nummerierte Kreise, die alle einen fünften Kreis Γ berühren.

Berühren Γ_i und Γ_j Γ beide von innen oder beide von außen, sei dann δ_{ij} die Länge eines **äußeren** Tangentenabschnittes, der Γ_i und Γ_j verbindet.

Berühren Γ_i und Γ_j Γ von innen und außen, sei dann δ_{ij} die Länge eines **inneren** Tangentenabschnittes, der Γ_i und Γ_j verbindet.

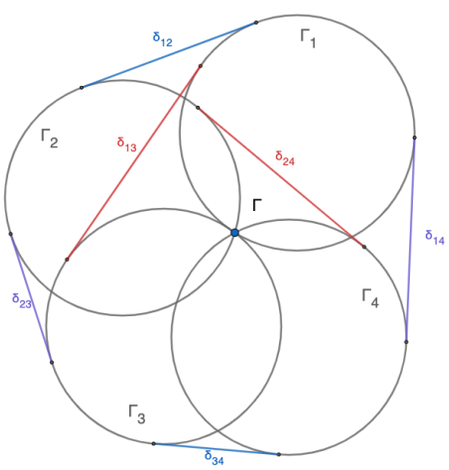


Dann gilt die Casey Bedingung: $\delta_{12} \cdot \delta_{34} + \delta_{14} \cdot \delta_{23} = \delta_{13} \cdot \delta_{24}$

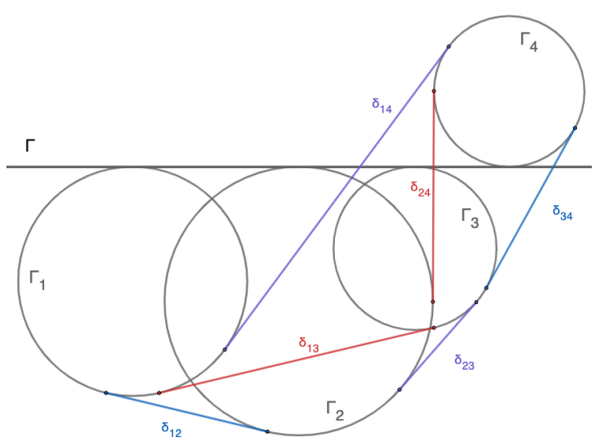
Erweiterung: die Casey Bedingung gilt auch in folgenden Grenzfällen

Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 sind Punkte (Kreise mit Radius Null) auf Γ:
die Tangentenabschnitte werden zu den Seiten und Diagonalen eines Sehnenvierecks.
Das ist der Satz des Ptolemäus.

Γ ist ein Punkt (Kreis mit Radius null) :
4 Kreise schneiden sich in einem Punkt



Γ ist eine Gerade (Kreis mit Radius unendlich):
4 Kreise haben eine gemeinsame Tangente



Dans une de nos démonstrations du théorème de Feuerbach on choisira Γ_1, Γ_2, Γ_3 de rayon nul.

Die Umkehrung des Satzes von Casey gilt ebenso:

Erfüllen 4 Kreise die Casey-Bedingung, so trifft einer der drei Fälle zu:
- alle 4 Kreise haben einen gemeinsamen Berührkreis
- alle 4 Kreise schneiden sich in einem Punkt
- alle 4 Kreise haben eine gemeinsame Tangente

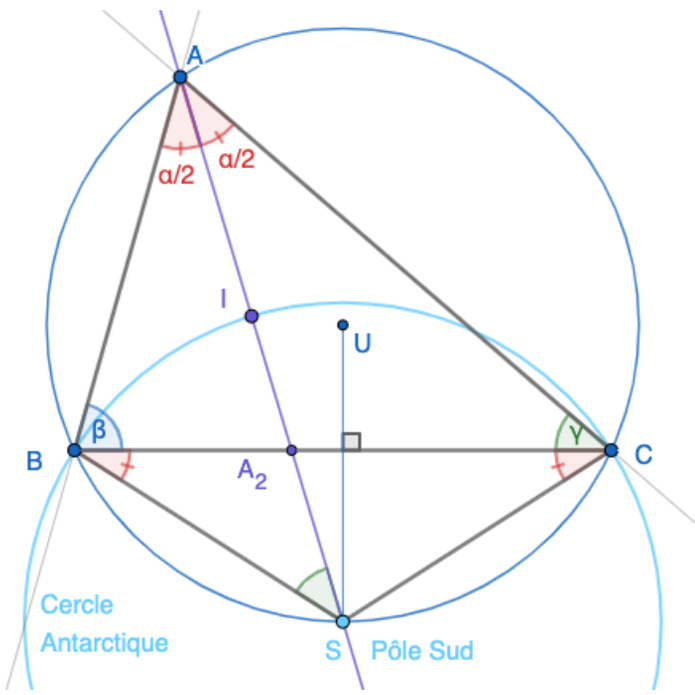
La démonstration du théorème et de sa réciproque est calculatoire et on ne la présente pas ici.

THÉORÈME DU PÔLE SUD – propriétés de base

Soit ABC un triangle quelconque et (ABC) son cercle circonscrit.
Soit I le centre du cercle inscrit, A'' le pied de la bissectrice issue de A
et S le point d'intersection de cette bissectrice et de (ABC).

Alors S est sur la médiatrice de [BC] et B, C, I sont circonscrits à un cercle de centre S.

S est appelé le **pôle Sud** de ABC (par rapport à A).
Le cercle de centre S passant par B, C, I est appelé le **cercle antarctique** de ABC (par rapport à A).



Démonstration

On montre que S est sur la médiatrice de [BC]

On procède par chasse aux angles.
Soit A_2 l'intersection de la A-bissectrice (AI) avec (BC).
Les angles rouges en A sont de mesure $\alpha/2$.
Par construction A, B, C, S sont cocycliques sur (ABC).
Somme des angles de ABC $\alpha + \beta + \gamma = 180$

Théorème de l'angle inscrit sur la corde AB de (ABC) :
$ASB = \gamma$
Somme des angles de ABS
$\alpha/2 + \beta + \gamma + SBA_2 = 180$
$SBA_2 = \alpha/2$ [1]

Théorème de l'angle inscrit sur la corde AS :
$SBA = 180 - ACS$
$SBA_2 + CBA = 180 - (ACA_2 + A_2CS)$
$\alpha/2 + \beta = 180 - \gamma - A_2CS$
$A_2CS = 180 - \gamma - \beta - \alpha/2$
$A_2CS = \alpha/2$ [2]

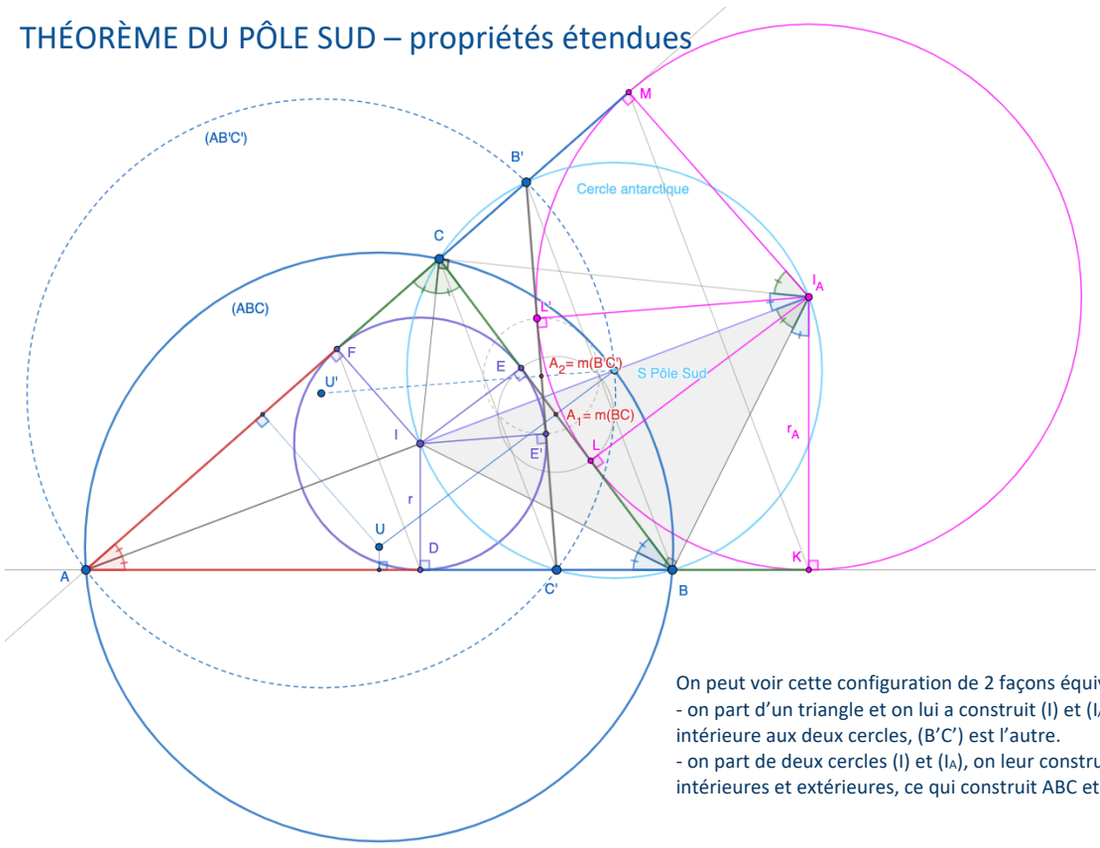
[1] & [2] $SBA_2 = A_2CS$ donc BCS est isocèle en S et
SB = SC [3]
S est sur la médiatrice de [BC].

On montre que S est le centre du cercle (B, C, I) appelé cercle antarctique

Somme des angles de BIS $\alpha/2 + \beta/2 + \gamma + BIS = 180$
$BIS = \alpha/2 + \beta/2 = SBI$
Donc SBI est isocèle en S **SB = SI** [4]

[3] & [4] **SB = SI = SC**

THÉORÈME DU PÔLE SUD – propriétés étendues



On peut voir cette configuration de 2 façons équivalentes :
- on part d'un triangle et on lui a construit (I) et (I_A). (BC) est une tangente intérieure aux deux cercles, (B'C') est l'autre.
- on part de deux cercles (I) et (I_A), on leur construit leurs tangentes intérieures et extérieures, ce qui construit ABC et AB'C'.

Le centre du cercle exinscrit I_A est sur le cercle antarctique et le pôle Sud est le milieu de $[II_A]$
et milieu de [BC] = milieu de [EL] milieu de [B'C']= milieu de [E'L']
[B'C'] est la seconde tangente interne à (I) et (I_A)

Soit un triangle ABC quelconque.
Soit (I) = (I, r) son cercle inscrit et (I_A) = (I_A, r_A) son cercle A-exinscrit.
Par construction A, I, I_A et S sont alignés sur la bissectrice de *BAC*.
Soit B', C' les symétriques de B, C par rapport à (AI).
(ABC) est le cercle de centre U circonscrit à ABC et (A'B'C') est le cercle de centre U' circonscrit à A'B'C'.
Par construction et symétrie ABC et AB'C' ont les mêmes cercles inscrit, A-exinscrit et antarctique.

On a montré dans pôle Sud 1.0 que S est sur la médiatrice de [BC] et SI = SB = SC
On montre de même que S est sur la médiatrice de [B'C'] et SI = SB' = SC'
Donc I, B, B', C, C' sont cocycliques sur le cercle antarctique.

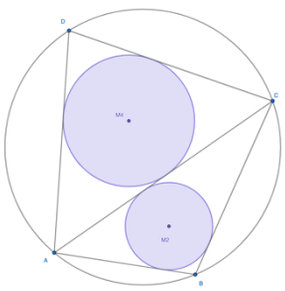
On décompose l'angle plat *KBA* en 4 parties :
$KBA = 180 = KBI_A + I_ABC + CBI + IBA$
BI_A est la bissectrice de KBC donc $KBI_A = I_ABC$ BI est la bissectrice de CBA donc $CBI = IBA$
Donc $180 = 2\ I_ABC + 2\ CBI = 2\ (I_ABC + CBI) = 2\ I_ABI$
Donc **$I_ABI = 90$** On aurait aussi pu dire directement que les bissectrices intérieures et extérieures de (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
De même **$ICI_A = 90$** donc I, I_A, B, C sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[II_A]$
De même I, I_A, B', C' sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[II_A]$
Donc I, B, B', C, C' et I_A sont cocycliques sur le cercle antarctique de diamètre $[II_A]$ et de centre S.

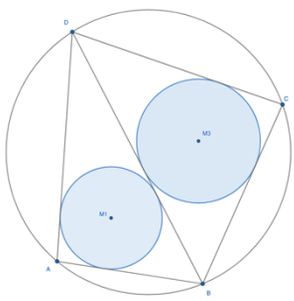
Par chasse aux tangentes détaillée dans la section chasse aux tangentes, on obtient BL = CE
Comme $BA_1 = BL + LA_1 = CA_1 = CE + EA_1$ on peut éliminer BL et CE : il reste $LA_1 = EA_1$ et
milieu de [BC] = milieu de [EL]

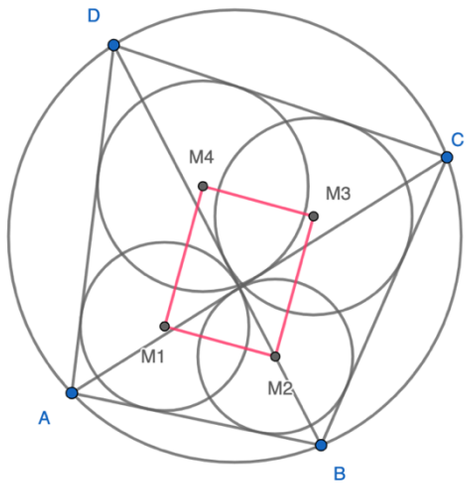
Par symétrie, **[B'C'] est la seconde tangente interne à (I) et (I_A)**

JAPANISCHER SATZ FÜR KONZYKLISCHE VIERECKE

ABCD ist ein Sehnenviereck.
Jede Diagonale teilt es in zwei Teildreiecke auf.
Es entstehen vier Teildreiecke.



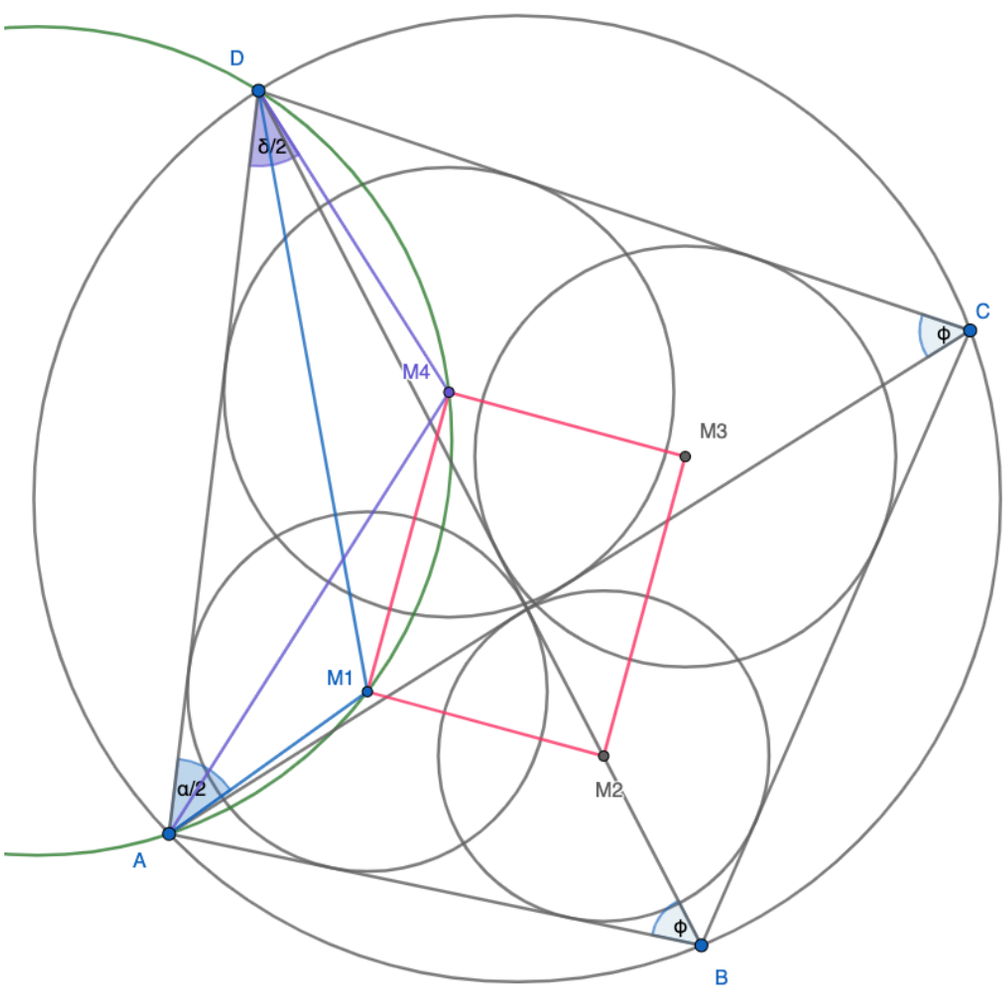




M_1 ist der Mittelpunkt des Inkreises von ABD
M_2 ist der Mittelpunkt des Inkreises von ABC
M_3 ist der Mittelpunkt des Inkreises von BCD
M_4 ist der Mittelpunkt des Inkreises von ACD

$M_1M_2M_3M_4$ ist ein Rechteck

Démonstration



AM_1 est la bissectrice de *BAD*	$\boldsymbol{M_1AD = ½\ \alpha}$	
DM_1 est la bissectrice de *ADB*	$ADM_1 = ½\ ADB$	
Somme des angles de AM_1D	$180 = M_1AD + DM_1A + ADM_1$	
	$180 = ½\ \alpha + DM_1A + ½\ ADB$	[1]
Somme des angles dans *ADB*	$180 = ADB + \alpha + DBA$	
	$½\ ADB = 90 – ½\ \alpha - ½\ DBA$	[2]
[2] dans [1]	$180 = ½\ \alpha + DM_1A + 90 – ½\ \alpha - ½\ DBA$	
	$\boldsymbol{DM_1A = 90 + ½\ DBA}$	[3]
DM_4 est la bissectrice de *ADC*	$ADM_4 = ½\ \delta$	
AM_4 est la bissectrice de *CAD*	$M_4AD = ½\ CAD$	
Somme des angles de AM_4D	$180 = M_4AD + DM_4A + ADM_4$	
	$180 = ½\ CAD + DM_4A + ½\ \delta$	[4]
Somme des angles dans *ADC*	$180 = CAD + \delta + DCA$	
	$½\ CAD = 90 - ½\ \delta - ½\ DCA$	[5]
[5] dans [4]	$180 = 90 - ½\ \delta - ½\ DCA + DM_4A + ½\ \delta$	
	$\boldsymbol{DM_4A = 90 + ½\ DCA}$	[6]

ABCD est un quadrilatère inscrit, donc d'après le théorème de l'angle inscrit sur la corde AD : $DBA = DCA = \phi$

[3] & [6] alors $\boldsymbol{DM_1A = DM_4A}$

Donc d'après le théorème de l'angle inscrit sur la corde AD : **AM_1M_4D est un quadrilatère inscrit**.

Alors $\boldsymbol{DM_4M_1 = 180 - M_1AD}$ [7]

De même on montre que DCM_3M_4 est un quadrilatère inscrit.

Alors $\boldsymbol{M_3M_4D = 180 - DCM_3}$ [8]

AM_3 est la bissectrice de *DCB* $\boldsymbol{DCM_3 = ½\ \gamma}$

[7] + [8] $DM_4M_1 + M_3M_4D = 360 - M_1AD - DCM_3 = 360 - ½\ \alpha - ½\ \gamma$ [9]

ABCD est un quadrilatère inscrit donc $\alpha = 180 - \gamma$

En divisant par -2 $- ½\ \alpha = 90 + ½\ \gamma$

$- ½\ \alpha - ½\ \gamma = -90$ [10]

[9] & [10] $\boldsymbol{DM_4M_1 + M_3M_4D = 360 - 90 = 270}$

$\boldsymbol{M_3M_4M_1 = 270}$

Alors $\boldsymbol{M_1M_4M_3 = 360 - M_3M_4M_1 = 360 - 270 = 90}$

On montre de même que les 3 autres angles de $M_1M_2M_3M_4$ sont aussi droits.

Donc $M_1M_2M_3M_4$ est un rectangle.

QED

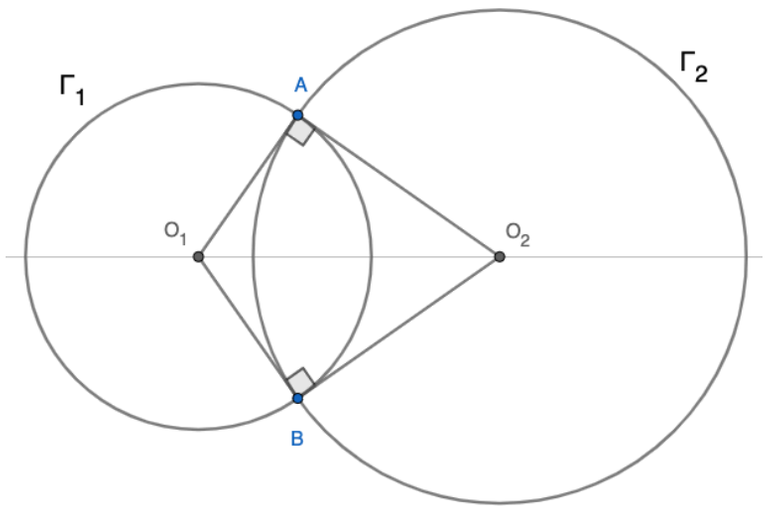
CERCLES ORTHOGONAUX

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 de centres O_1 et O_2 sécants en A et B sont dits orthogonaux si $O_1AO_2 = 90$.
On a alors aussi $O_2AO_1 = 90$.

Leurs tangentes respectives en A et en B sont orthogonales.

On a $AB \perp O_1O_2$

On note $\Gamma_1 \perp \Gamma_2$



TROIS PROPRIETÉS DES CERCLES ORTHOGONAUX

THÉORÈME DES DEUX DIAMÈTRES PERPENDICULAIRES D'ALTSCHILLER

Soient Γ, Γ_1 deux cercles sécants ; de centres O, O_1 ; de points d'intersection A, B.
Soient [PQ] un diamètre de Γ & [RS] un diamètre de Γ_1 tels que [PQ] $\perp$ [RS]

$\Gamma \perp \Gamma_1$ *si et seulement si* (PAR) est une monienne

A est défini comme l'intersection de Γ et Γ_1
Soit α = *SRA*
ARO_1 est isocèle en O_1 alors $RAO_1 = SRA = \alpha$

Soit X l'intersection de PQ et RS.
Par hypothèse RXP est rectangle.
Alors $RPX = 90 - \alpha$

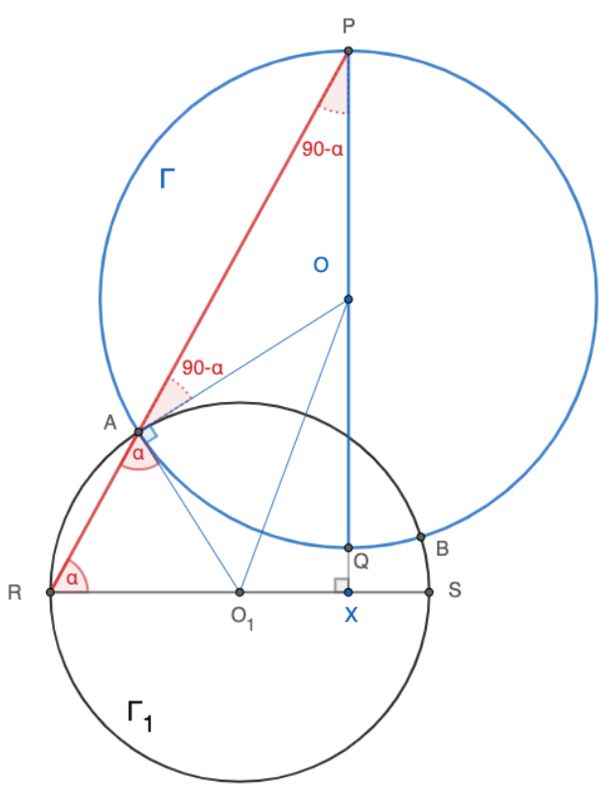
OPA est isocèle en O alors $OAP = RPX = 90 - \alpha$

Démonstration - sens direct
Si $\Gamma \perp \Gamma_1$ alors $O_1AO = 90$
On décompose l'angle *RAP*
$RAP = RAO_1 + O_1AO + OAP$
$RAP = \alpha + 90 + 90 - \alpha = 180$
P, A, R sont donc alignés

QED

Démonstration - sens retour
Si P, A, R sont alignés, alors $RAP = 180$
$PAR = RAO_1 + O_1AO + OAP = 180$
$\alpha + O_1AO + 90 - \alpha = 180$
$O_1AO = 90$
Alors $\Gamma \perp \Gamma_1$

QED

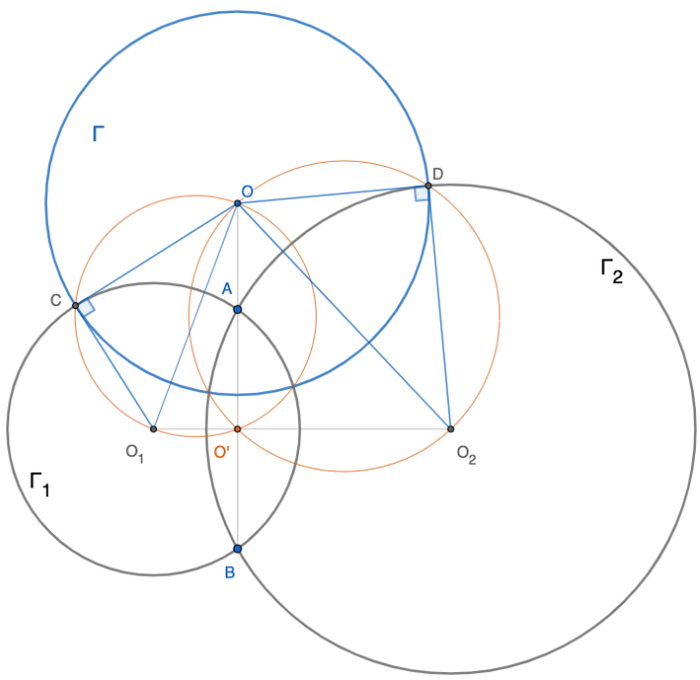


PROPRIÉTÉ # 1 DES CERCLES ORTHOGONAUX

Soit Γ un cercle de centre O. Si Γ est orthogonal à deux cercles Γ_1 et Γ_2 sécants en A et B alors O est sur (AB).
AB est l'axe radical de Γ_1 et Γ_2.
Il y a une infinité de possibilités pour Γ mais O est nécessairement sur (AB).

Rappel :
Deux cercles Γ_1 et Γ_2 de centres O_1 et O_2 sécants en A et B sont dits orthogonaux si $O_1AO_2 = 90$.
On a alors aussi $O_2AO_1 = 90$.
Leurs tangentes respectives en A et en B sont orthogonales. On a AB ⊥ O_1O_2
On note $\Gamma_1 \perp \Gamma_2$

Démonstration



Γ et Γ_1 se coupent en C tel que $O_1CO = 90$
C est sur le cercle de diamètre $[OO_1]$

Γ et Γ_2 se coupent en D tel que $ODO_2 = 90$
D est sur le cercle de diamètre $[OO_2]$

Soit O' le second point d'intersection
des cercles de diamètre $[OO_1]$ et $[OO_2]$.

Théorème de l'angle inscrit dans (OCO_1O') :
$OO'O_1 = 180 - O_1CO = 90$

Théorème de l'angle inscrit dans (ODO_2O') :
$O_2O'O = 180 - ODO_2 = 90$

Donc **$OO' \perp O_1O_2$ et O', O_1, O_2 sont alignés.**

Il reste à prouver que A est sur OO'

Soit R, r_1, r_2 les rayons de Γ, Γ_1, Γ_2
Pythagore dans $OO'O_1$ et $OO'O_2$:
$O'O^2 = OO_1^2 - O_1O'^2 = OO_2^2 - O_2O'^2$
Pythagore dans OCO_1 et ODO_2 :
$R^2 + r_1^2 - O_1O'^2 = R^2 + r_2^2 - O_2O'^2$
$r_1^2 - O_1O'^2 = r_2^2 - O_2O'^2$
$AO_1^2 - O_1O'^2 = AO_2^2 - O_2O'^2$ [1]

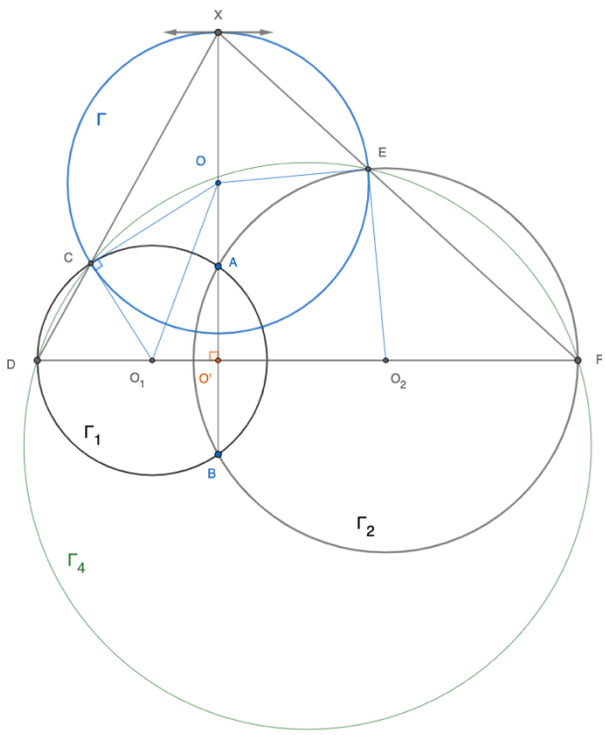
Formule des cosinus dans $O'AO_1$ $AO_1^2 = O_1O'^2 + AO'^2 - 2AO'.O'O_1\cos(AO'O_1)$
$AO_1^2 - O_1O'^2 = AO'^2 - 2AO'.O'O_1\cos(AO'O_1)$ [2]
Formule des cosinus dans $O'AO_2$ $AO_2^2 = O_2O'^2 + AO'^2 - 2AO'.O'O_2\cos(O_2O'A)$
$AO_2^2 - O_2O'^2 = AO'^2 - 2AO'.O'O_2\cos(O_2O'A)$ [3]
[1], [2], [3] se simplifie en $O'O_1\cos(AO'O_1) = O'O_2\cos(O_2O'A)$
$O'O_1\cos(AO'O_1) = O'O_2\cos(180 - AO'O_1)$
$O'O_1\cos(AO'O_1) = -O'O_2\cos(AO'O_1)$
Seulement possible si $\cos(AO'O_1) = 0$
Donc $AO' \perp O'O_1$ & **$(AB) \perp O_1O_2$**

QED

PROPRIÉTÉ # 2 DES CERCLES ORTHOGONAUX

Si un cercle Γ a son centre O sur l'axe radical (AB) de deux cercles sécants et est orthogonal à l'un d'eux, alors il est orthogonal à l'autre.

Démonstration



Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles sécants ; de centres O_1, O_2 ;
de points d'intersection A, B.
Soit Γ un cercle de centre O tel $\Gamma \perp \Gamma_1$
Nous montrons que si O est sur (AB) alors $\Gamma \perp \Gamma 2$

Notons
X l'un des points d'intersection de (AB) avec Γ
C l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ
$\Gamma \perp \Gamma_1$ veut dire que $O_1CD = 90$

D'après le théorème des deux diamètres perpendiculaires d'Altshiller appliqué aux diamètres (XOA) de Γ et (O_1O_2) de Γ_1, comme $(OA) \perp (O_1O_2)$, on peut affirmer que
(CX) et (O_1O_2) se coupent sur Γ_1

Notons :
D ce point d'intersection
Tx la tangente à Γ en X
E l'un des points d'intersection de Γ_2 et Γ

Par hypothèse	$(DO_1O_2) \perp (AB)$
par définition d'une tangente	$(AB) \perp Tx$
d'après l'axiome des perpendiculaires	$(DO_1O_2) // Tx$

Notons
Γ_4 le cercle circonscrit au triangle CDE
F le second point d'intersection de Γ_4 avec G_2

On rappelle le théorème des trois cercles de Monge :
lorsque trois cercles sont sécants deux à deux, les trois droites d'intersection sont concourantes.
Appliqué ici à Γ_1, Γ_2, Γ_4 : (AB), (DC), (EF) sont concourantes.
Sachant que (AB) et (DC) se coupent X, on peut alors affirmer que (EF) passe aussi par X.

On applique le théorème 1 de Reim à Γ et Γ_4, aux points de base C et E, aux moniennes (XCD) et (XEF) :
Tx // (DF)

Par transitivité de la relation //	$(DO_1O_2) // (DF)$
Comme elles ont D en commun	$(DO_1O_2) = (DF)$

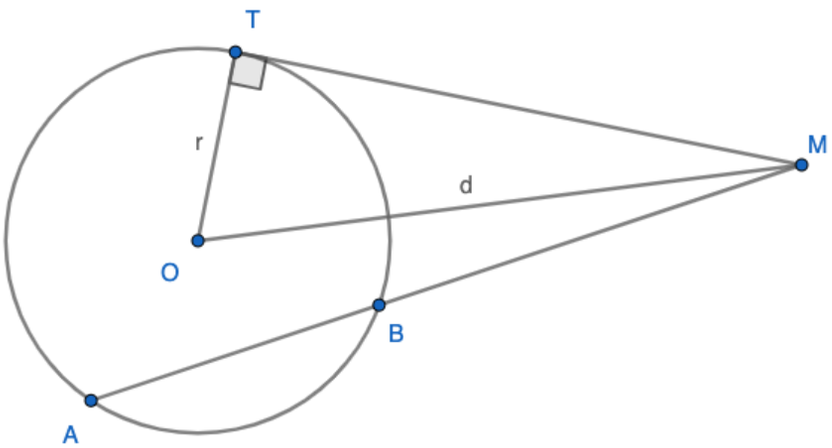
Donc (DO_2F) est une droite diamétrale de Γ_2, perpendiculaire à (AB) qui est une droite diamétrale de Γ.
Le théorème des deux diamètres perpendiculaires d'Altshiller nous permet alors de conclure que $\Gamma \perp \Gamma_2$

QED

La réciproque est aussi vraie et se montre par un raisonnement similaire.

PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT À UN CERCLE

Mesure introduite par Jakob Steiner en 1826.



Soit un point M extérieur à un cercle C et soit une sécante qui coupe le cercle en A et B.

La **puissance** de M par rapport au cercle C est définie par **$P_C(M) = MA.MB$**

La puissance ne dépend pas de la sécante : elle reste constante quelle que soit la sécante choisie.

En effet, par le Sekanten-Tangenten Satz la puissance vaut **$P_C(M) = MT^2$**

Par Pythagore, on a alors aussi **$P_C(M) = d^2 - r^2$**

Si le point M est sur le cercle, la puissance est nulle.

Si le point M est à l'intérieur du cercle, la puissance vaut toujours $d^2 - r^2$ et elle est négative.

AXE RADICAL DE DEUX CERCLES

L'axe radical de deux cercles de centres distincts, est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à ces deux cercles.

On considère deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\mathcal{C}'(O', R')$ de centres O et O' distincts.
On note $P_{\mathcal{C}}(M) = MO^2 - R^2$ la puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$
$P_{\mathcal{C}'}(M) = MO'^2 - R'^2$ la puissance de M par rapport à $\mathcal{C}'$
Un point M de même puissance par rapport aux deux cercles vérifie :

$$P_{\mathcal{C}}(M) = P_{\mathcal{C}'}(M)$$
$$MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$$
$$MO'^2 - MO^2 = R'^2 - R^2$$

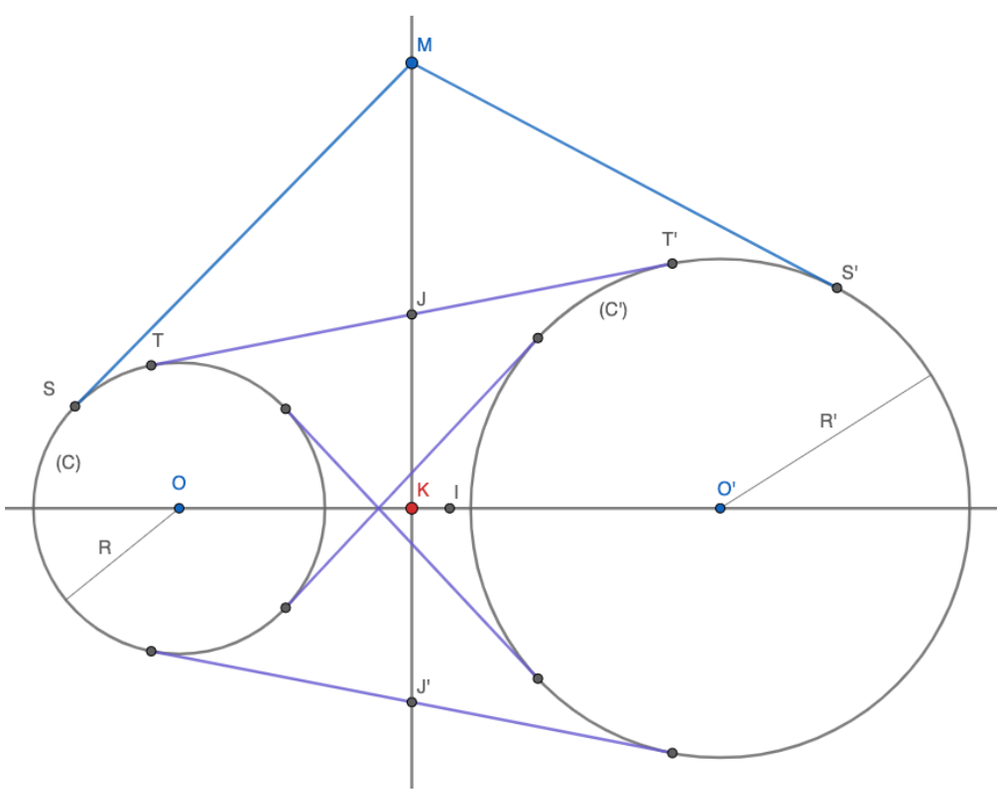
Soit I le milieu de [OO'] et K le projeté de M sur (OO').
Tous les points M de même puissance ont le même projeté orthogonal sur (OO').
D'après Pythagore dans MOK et MO'K, on a $MO'^2 - MO^2 = MK^2 + O'K^2 - MK^2 - OK^2$
$= O'K^2 - OK^2$
$= (\frac{1}{2} OO' + IK)^2 - (\frac{1}{2} OO' - IK)^2$
$= 2\, OO'.IK$
On peut alors construire K connaissant la relation de distance :

$$\mathbf{IK = (R'^2 - R^2)/2.OO'}$$

(par rapport à I, K étant situé du côté du plus petit cercle)

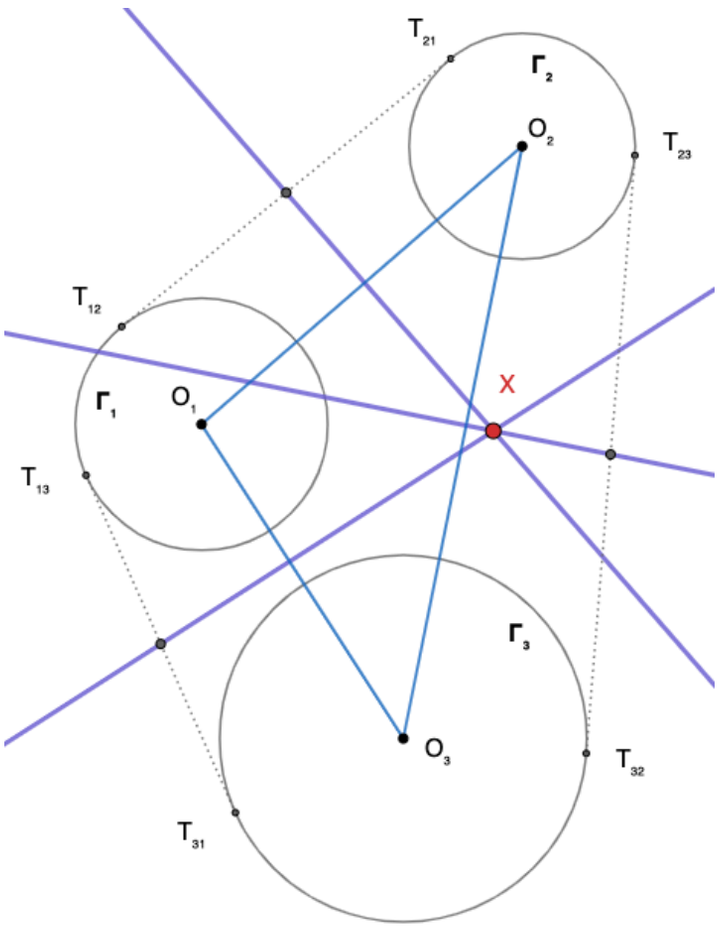
L'axe radical est donc la droite perpendiculaire à (OO') passant par K.
Si les cercles sont sécants, l'axe radical est la droite joignant les points d'intersection.

L'axe radical est aussi l'ensemble des points tels que MS = MS'
Si le petit cercle n'est pas entièrement dans le grand, ils ont une tangente commune (TT') dont le milieu J est sur l'axe radical.
Cette propriété permet de construire l'axe radical, perpendiculaire à (OO') passant par J.



THÉORÈME DES AXES RADICAUX

Soient trois cercles Γ_1, Γ_2, Γ_3
Les trois axes radicaux obtenus deux à deux sont soit concourants, soit parallèles.
Ils sont parallèles (éventuellement confondus) *ssi* les centres des trois cercles sont alignés.



Démonstration

Supposons que les axes radicaux de Γ_1 avec Γ_2 et de Γ_2 avec Γ_3 ne soient pas parallèles.
Soit alors X leur point d'intersection.
On a $P_{\Gamma 1}(X) = P_{\Gamma 2}(X)$ et $P_{\Gamma 2}(X) = P_{\Gamma 3}(X)$
Donc $P_{\Gamma 3}(X) = P_{\Gamma 1}(X)$ ce qui est la définition que X est sur le troisième axe radical.

Supposons maintenant que les axes radicaux de Γ_1 et Γ_2 et de Γ_2 et Γ_3 soient parallèles.
Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles donc (O_1O_2) // (O_2O_3)
Ces 2 droites ayant O_2 en commun, les points O_1, O_2, O_3 sont alignés.
Dès lors, l'axe radical de Γ_3 avec Γ_1 est aussi perpendiculaire à la droite des centres $(O_1O_2O_3)$, donc parallèle aux deux autres axes radicaux.

Réciproquement, l'alignement des centres O_1, O_2, O_3 implique que les axes radicaux soient parallèles entre eux, de direction perpendiculaire à la droite des centres.

Comment vont vos lettres grecques ?
La potence Γ c'est gamma majuscule, c'est-à-dire le C majuscule grec.
Une façon fréquente de nommer les cercles.

INVERSION

La géométrie inversive est une extension de la géométrie euclidienne.
Nous n'allons ici en aborder que les aspects fondamentaux sans tout démontrer – juste ce qu'il faut pour comprendre 3 démonstrations élégantes :

- une démonstration du théorème des 6 cercles de Miquel
- une des 3 démonstration que nous donnons du théorème de Feuerbach
- une façon de construire le centre perdu du cercle : le problème du cercle de Napoléon.

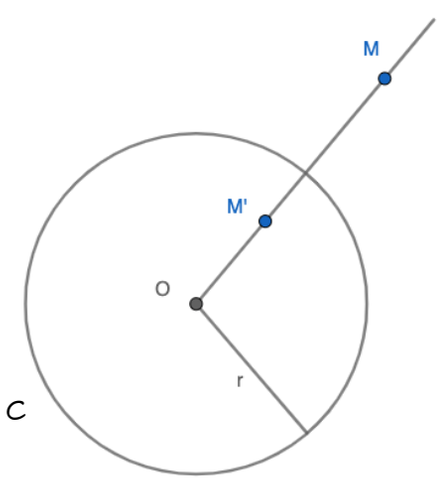
Soit le cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0, r)$. L'inversion est l'application du plan privé de 0 dans lui-même, qui à un point M associe un point M' tel que : $M' \in [0M)$ & $0M \cdot 0M' = r^2$

O est le centre de l'inversion ; r^2 est sa puissance ; $\mathcal{C}$ est le cercle d'inversion.

Soit i : $P \setminus \{0\} \to P \setminus \{0\}$ une inversion de centre 0 et de puissance r^2.

1. Chaque point du cercle $\mathcal{C}(0, r)$ est invariant par i : $M \in \mathcal{C}(0, r)$ alors i(M) = M

2. i est une bijection. C'est même une involution : pour tout point $M \in P \setminus \{0\}$, i(i(M)) = M



La fonction d'inversion pour un cercle de rayon r centré sur l'origine du système de coordonnées s'écrit $(x, y) \mapsto r^2 . (x, y) / (x^2 + y^2)$

En coordonnées polaires (R, ϕ) l'inversion s'exprime simplement : $(R, \phi) \mapsto (r^2/R , \phi)$
Pour l'inversion sur le cercle unité : $(R, \phi) \mapsto (1/R , \phi)$ d'où l'appellation inversion.

Pour simplifier on va supposer que le cercle d'inversion est le cercle unité de centre O et de rayon 1.

La fonction d'inversion s'écrit alors en coordonnées cartésiennes
$(x, y) \mapsto (X, Y) = (x, y) / (x^2 + y^2)$ et $(X, Y) \mapsto (x, y) = (X, Y) / (X^2 + Y^2)$

Si $u \mapsto (x(u), y(u))$ est la représentation paramétrique d'une courbe, alors
$u \mapsto (X(u), Y(u)) = (x(u), y(u)) / (x(u)^2 + y(u)^2)$ est la représentation paramétrique de la courbe image.

Si $f(x, y) = 0$ est la représentation implicite d'une courbe, alors
$f(X/(X^2 + Y^2), Y/(X^2 + Y^2)) = 0$ est la représentation implicite de la courbe image.

Inversion d'une droite

Soit une droite d'équation $ax + by + c = 0$
Son image par inversion sur (O, 1) est $aX/(X^2 + Y^2) + bY/(X^2 + Y^2)= 0$
$aX + bY + c\,(X^2 + Y^2) = 0$

Si c = 0 c'est la même équation que la droite de départ :
l'image par inversion d'une droite passant par l'origine de l'inversion est elle-même.
On dit qu'elle est invariante globalement.

Si c ≠ 0 on transforme l'équation : $X^2 + a/c\,x + Y^2 + b/c\,Y = 0$
$(X + a/2c)^2 + (Y + b/2c)^2 = (a^2 + b^2)/4c^2$

L'image par inversion d'une droite ne passant par l'origine de l'inversion est un cercle passant par O

Inversion d'un cercle

Soit un cercle d'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
Son image par inversion sur (O, 1) est $(X/(X^2 + Y^2) - x_0)^2 + (Y/(X^2 + Y^2) - y_0)^2 = r^2$
Qui se réarrange $(X^2 + Y^2).(x_0^2 + y_0^2 - r^2) - 2Xx_o - 2yy_0 + 1 = 0$

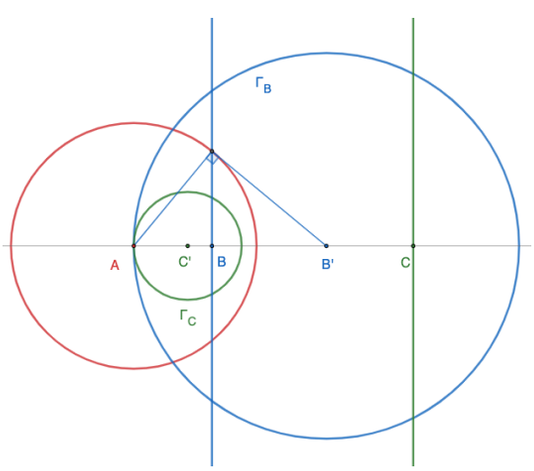
Si $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ c'est à-dire **si le cercle de départ passe par O, l'image du cercle est une droite.**

Si $x_0^2 + y_0^2 \neq r^2$ c'est à-dire **si le cercle de départ ne passe pas par O,**
L'équation se transforme en $(X - x_o/(x_0^2 + y_0^2 - r^2))^2 + (Y - y_o/(x_0^2 + y_0^2 - r^2))^2 = r^2/(x_0^2 + y_0^2 - r^2))^2$
… qui est l'équation d'un cercle : **l'image du cercle est un cercle**.

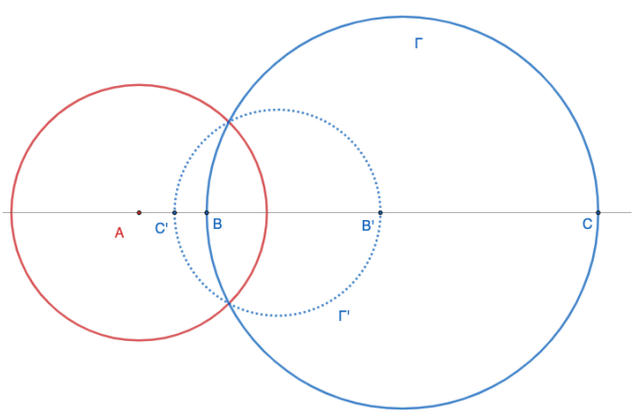
Si le cercle de départ est centré sur l'origine ($x_o = 0$ et $y_0 = 0$), le cercle image est un cercle centré sur l'origine de rayon 1/r.

Dans une inversion transformant un cercle *C* en une droite *D*, le centre de *C* et le symétrique du centre d'inversion par rapport à *D* sont inverses l'un de l'autre.

Inversion de deux droites
autour du cercle d'inversion rouge



Inversion d'un cercle
autour du cercle d'inversion rouge



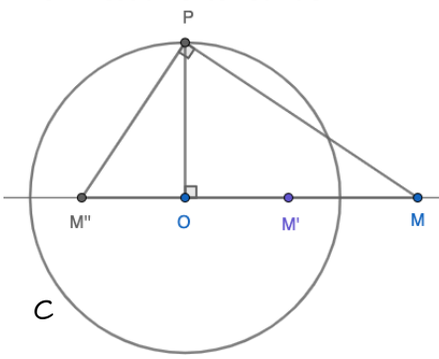
Construction de l'inverse d'un point à la règle et au compas

Étant donné un cercle $\mathcal{C}$(O, r) et un point M ≠ O, comment construire géométriquement l'image de M par l'inversion i de cercle $\mathcal{C}$?

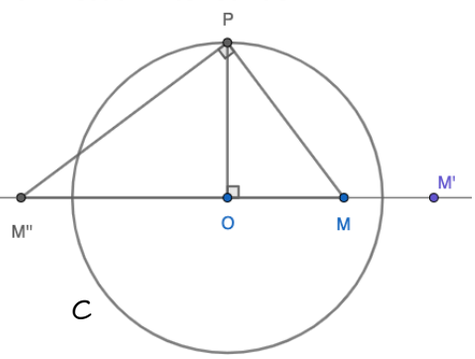
1) On trace la perpendiculaire à (OM) en O. Cette perpendiculaire recoupe $\mathcal{C}$ en P.
2) On trace la perpendiculaire à (MP) en P. Cette droite recoupe (OM) en M''.
3) On construit M' le symétrique de M'' par rapport à O.

M' est l'inverse de M : M' = i(M)

Si M est à l'extérieur de $\mathcal{C}$



Si M est à l'intérieur de $\mathcal{C}$



Pourquoi ça marche ?

Dans un triangle rectangle, on sait que (voir le Höhensatz dans quelques pages)

$PO^2 = OM.\ OM''$

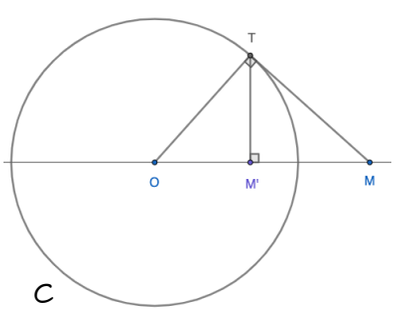
Comme OM'' = OM' et que OP = r on a $OM.OM' = r^2$

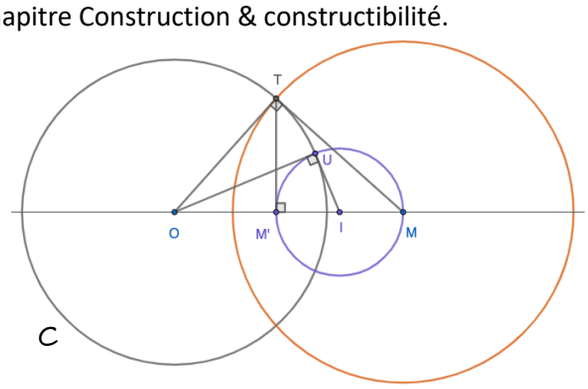
Et comme M' est sur la demi-droite [OM), M' est bien l'inverse de M.

Seconde construction - qui fonctionne pour la même raison :

On construit la tangente MT à $\mathcal{C}$ et on tombe la hauteur de T sur OM.

Pour la construction de la tangente, voir le chapitre Construction & constructibilité.





Construction de l'inverse d'un point au compas seul

Voir le cercle de Napoléon à la fin du livre.

Cercles orthogonaux

On dit que **deux cercles sont orthogonaux** lorsqu'ils sont sécants, et qu'en leurs deux points d'intersection leurs tangentes sont perpendiculaires.

Avec la seconde construction : (M, MT) et le cercle de diamètre [MM'] sont orthogonaux à $\mathcal{C}$.

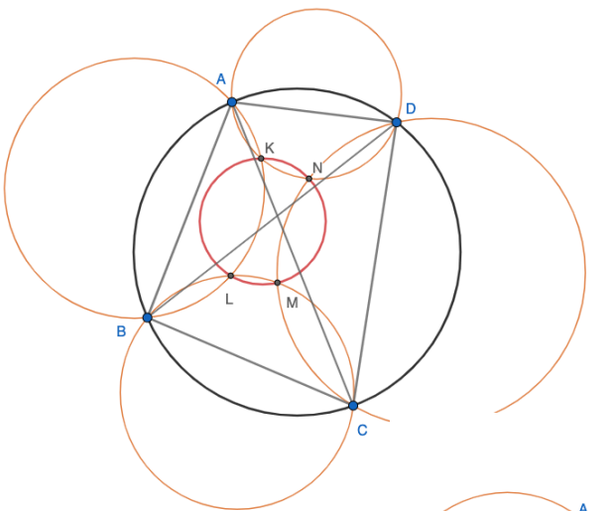
Un cercle orthogonal au cercle d'inversion est invariant globalement.

(alors que $\mathcal{C}$ est invariant point par point)

THEORÈME DES 6 CERCLES DE MIQUEL

Pour un quadrilatère ABCD inscrit sur un cercle (noir), les 4 cercles (orange) construits sur ses côtés pour lesquels [AB], [BC], [CD], [DA] sont des **cordes**, se coupent en 4 points cocycliques (cercle rouge).

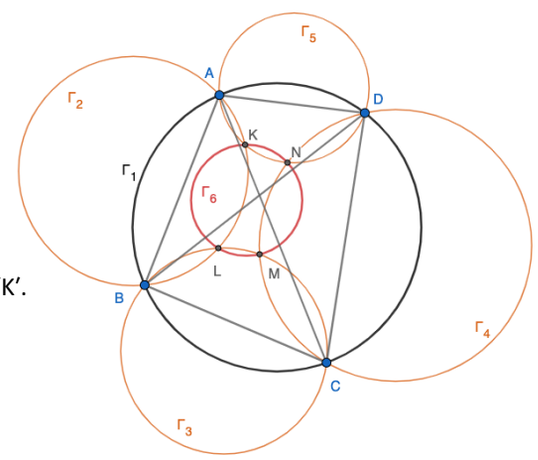
$K = \Gamma_2 \cap \Gamma_5$
$L = \Gamma_2 \cap \Gamma_3$
$M = \Gamma_3 \cap \Gamma_4$
$N = \Gamma_4 \cap \Gamma_5$



Démonstration par inversion

Soit Γ un cercle de centre A.
Soit Ψ une inversion de cercle d'inversion Γ.

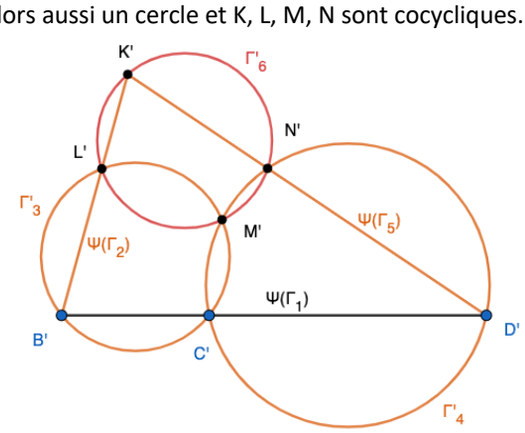
Ψ renvoie tout cercle passant par A à une droite :
$\Psi(\Gamma_1)$ est une droite B'D'
$\Psi(\Gamma_2)$ est une droite B'K'
$\Psi(\Gamma_5)$ est une droite D'K'
Alors $\Psi(\Gamma_1) \cup \Psi(\Gamma_2) \cup \Psi(\Gamma_5)$ est 3 droites formant un triangle B'D'K'.



Ψ renvoie tout cercle ne passant pas par A à un autre cercle :
$\Psi(\Gamma_3)$ est un cercle Γ_3' = (B'C'L') avec L' sur B'K' et C' sur B'D'
$\Psi(\Gamma_4)$ est un cercle Γ_4' = (C'D'N') avec N' sur D'K'
$\Psi(\Gamma_6)$ est un cercle Γ_6' = (K'L'N')

Ψ renvoie ainsi la configuration des 6 cercles de Miquel à la configuration exacte des 3 cercles de Miquel.
Alors Γ_3', Γ_4', Γ_6' se coupent en un point M' et K',L',M',N' sont cocycliques.
L'image réciproque de (K'L'M'N') est alors aussi un cercle et K, L, M, N sont cocycliques.

QED



Démonstration synthétique

Une démonstration qui généralise progressivement le théorème des 2 cercles de Reim pour montrer successivement les théorèmes des 3, 4, 5 et 6 cercles de Miquel est présentée en préambule à la démonstration synthétique du théorème de Feuerbach.

GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

UN PEU D'HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE

Schon in der antiken griechischen Mathematik wurden die klassischen Transversalen des Dreiecks untersucht:

- die Mittelsenkrechten, die sich im Umkreismittelpunkt schneiden,
- die Seitenhalbierenden, die sich im Verhältnis 2:1 im Schwerpunkt schneiden,
- die Höhen, die sich im Orthozentrum schneiden, und
- die Winkelhalbierenden der Innen- und Außenwinkel, die sich im Inkreismittelpunkt bzw. in den Ankreismittelpunkten schneiden,

Erst in der Neuzeit (17. -19. Jahrhundert) kamen weitere Entdeckungen hinzu.
Darunter eine große Zahl besonderer Punkte…

- der Miquel-Punkt
- der Lemoine-Punkt L
- der Gergonne-Punkt G
- der Nagel-Punkt Na
- die Fermat-Torricelli Punkte F_1 & F_2
- die Napoleon-Punkte N_1 & N_2
- die Vecten Punkte V_1 & V_2
- die Brocard-Punkte…

… aber auch besonderer Geraden und Kreisen:

- die eulersche Gerade, auf der Umkreismittelpunkt, Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt liegen;
- die Simson und Steiner Geraden
- der Feuerbachkreis, der durch die Seitenmittelpunkte, die Höhenfußpunkte und die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte geht und sowohl den Inkreis als auch die drei Ankreise berührt.
- der Taylor-Kreis

Viele Entdeckungen der Dreiecksgeometrie stammen aber auch aus den letzten Jahrzehnten.
Hier spielt die Verwendung dynamischer Geometrie-Software eine wichtige Rolle. Damit kann man mit geringem Zeitaufwand genaue Zeichnungen erstellen, die erkennen lassen, ob eine Vermutung allgemein richtig sein könnte. Computerprogramme zur automatisierten Beweisführung werden auch eingesetzt mit der Verwendung von trilinearen und baryzentrischen Koordinaten.

Wir werden erwähnen:

- die Kiepert, Jerabek und Feuerbach Hyperbel
- der neu entdeckten Lester und van Lamoen Kreise

En résumé la géométrie c'est essentiellement un cadeau gréco-franco-allemand saupoudré de 2 suisses et quelques britanniques fait à l'humanité.

DÉFINITIONS

Angle **aigu** : entre 0 et 90 degrés
Angle **droit** : 90 degrés
Angle **obtus** : entre 90 et 180 degrés
Angle **saillant** : entre 0 et 180 degrés = aigu, droit ou obtus
Angle **plat** : 180 degrés
Angle **rentrant** : entre 180 et 360 degrés

Triangle acutangle ou aigu
Triangle qui a 3 angles aigus.

Triangle obtusangle ou obtus
Triangle ayant un angle obtus, c'est-à-dire entre 90 et 180 degrés.
Comme un triangle a au maximum 1 angle obtus, un triangle obtusangle a donc 1 angle obtus et 2 angles aigus.

Triangle équilatéral
Triangle dont les 3 côtés ont la même longueur.
Ses 3 angles internes ont la même mesure de 60 degrés. C'est un triangle isocèle particulier.

Triangle isocèle
Triangle dont au moins 2 côtés sont de même longueur.
Un triangle ABC est dit isocèle en A ou de sommet A si AB = AC. Les angles internes β et γ sont alors égaux.

Triangle rectangle
Triangle ayant un angle droit.
Les côtés adjacents à l'angle droit sont appelés **cathètes**. Le côté opposé est appelé **hypoténuse**.

Triangle isocèle rectangle
Triangle isocèle et rectangle. C'est un demi carré. Ses angles internes valent 90, 45 et 45.

Triangle plat
Triangle dont les sommets sont alignés. (un peu théorique comme triangle…)

Triangle scalène (du grec skalenos = boiteux)
Triangle qui n'est ni isocèle ni rectangle ni plat.

Triangle quelconque
Triangle scalène ou isocèle ou rectangle ou plat.

Triangle des arpenteurs ou triangle 3-4-5
Triangle rectangle dont les côtés sont de rapports 3:4:5

Triangle de l'écolier ou triangle hémi-équilatéral
Triangle rectangle dont les mesures des angles sont 30, 60, 90 degrés et dont l'un des côtés de l'angle droit est la moitié de l'hypoténuse. Il est appelé ainsi car il sert de modèle pour les équerres.

Triangle d'or
Triangle isocèle dont les angles à la base valent le double de l'angle au sommet, soit 72 degrés. Voir le pentagone.

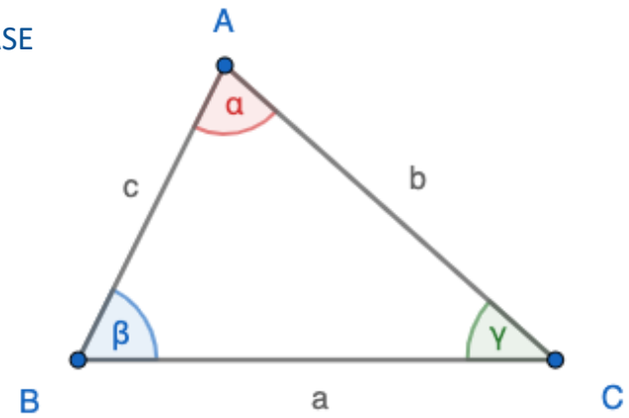
Triangle de Kepler
Triangle rectangle dont les carrés des longueurs des côtés sont en progression géométrique selon la raison du nombre d'or. Les côtés sont de rapports $1:\varphi:\varphi^2$ Voir le pentagone.

Triangle médian
Triangle dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle initial.

Cévienne = Ecktransversale - adjectif dérivé de Ceva
Segment de droite reliant un sommet du triangle à un point du côté opposé.
Les hauteurs, les médianes et les bissectrices sont des céviennes particulières.

Ménelienne - adjectif dérivé de Menelaus
Droite sécante = transversale à un triangle.
C'est une droite qui ne passe par aucun des sommets du triangle.

NOTATIONS ET RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DE BASE



Nous allons utiliser de façon systématique
les notations standardisées suivantes :

ABC représente un triangle quelconque de **sommets** A, B, C.

Les longueurs des **côtés** d'un triangle sont notées
a = BC b = CA c = AB

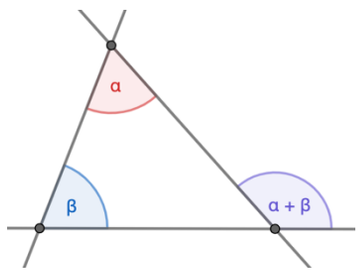
Les longueurs des côtés satisfont les inégalités
a < b + c **b < c + a** **c < a + b**

Les **angles** sont notés
α = angle en A β = angle en B γ = angle en C

BAC (en italique) représente l'angle de sommet A, allant dans le sens trigonométrique de [AB] vers [AC] tandis que BAC (pas en italique) représente le triangle de sommets A, B, C.
Pour la figure ci-dessus α = *BAC* β = *CBA* γ = *ACB*

La somme des angles est **$\alpha + \beta + \gamma = 180°$**

Une représentation inhabituelle de cette propriété :



La surface d'un triangle est notée **F** **F = ½ base . hauteur**

Le cercle inscrit est de rayon **r**. Son centre (Inkreismittelpunkt) est noté **I**
Les cercles exinscrits sont de rayon $\mathbf{r_A}$, $\mathbf{r_B}$, $\mathbf{r_C}$. Leurs centres (Ankreismittelpunkte) sont notés $\mathbf{I_a}$, $\mathbf{I_b}$, $\mathbf{I_c}$
Le cercle circonscrit est de rayon **R**. Son centre (Umkreismittelpunkt) est noté **U**
Le centre de gravité (Schwerpunkt) est noté **S**
L'orthocentre (Höhenschnittpunkt) est noté **H**

Pour faciliter leur identification on adopte un code couleur : **bissectrices**, **médiatrices**, **médianes**, hauteurs.

Dreiecke können spitzwinklig, stumpfwinklig und rechtwinklig sein.
Ein spitzwinkliges Dreieck ist ein Dreieck bei dem alle Winkel < 90° sind.

Für rechtwinklige Dreiecke gilt der Satz des Pythagoras:

Ist im Dreieck ABC $\gamma = 90°$ dann ist $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$
Ist im Dreieck ABC $\alpha = 90°$ dann ist $b^2 + c^2 = a^2$
Ist im Dreieck ABC $\beta = 90°$ dann ist $a^2 + c^2 = b^2$

Dans un triangle quelconque

Loi des cosinus $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$
$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$
$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$

Loi des sinus $\mathbf{a / \sin \alpha = b / \sin \beta = c / \sin \gamma = 2R}$

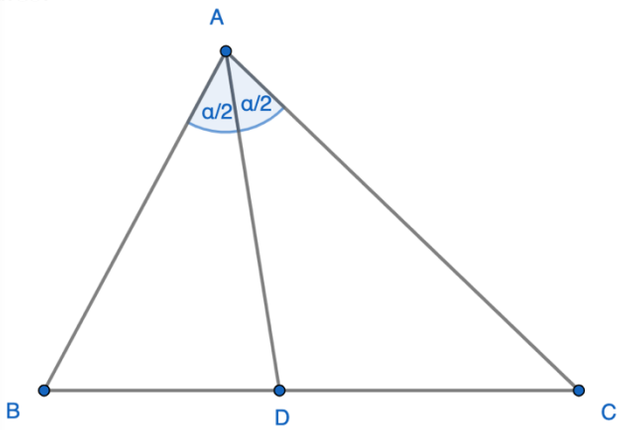
Aire $\mathbf{F = ½\ ab \sin \gamma = ½\ bc \sin \alpha = ½\ ac \sin \beta}$

THÉORÈME DE LA BISSECTRICE - WINKELHALBIERENDENSATZ

Une bissectrice partage un angle en 2 parties égales.

La bissectrice découpe le côté opposé dans le rapport des cotés adjacents

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$



Démonstration

Dans un triangle ABC, AD est la bissectrice de *BAC*.
On introduit le point E : intersection de AB avec la parallèle à AD en C.
On a alors les égalités d'angles : *BAD* = AEC = θ

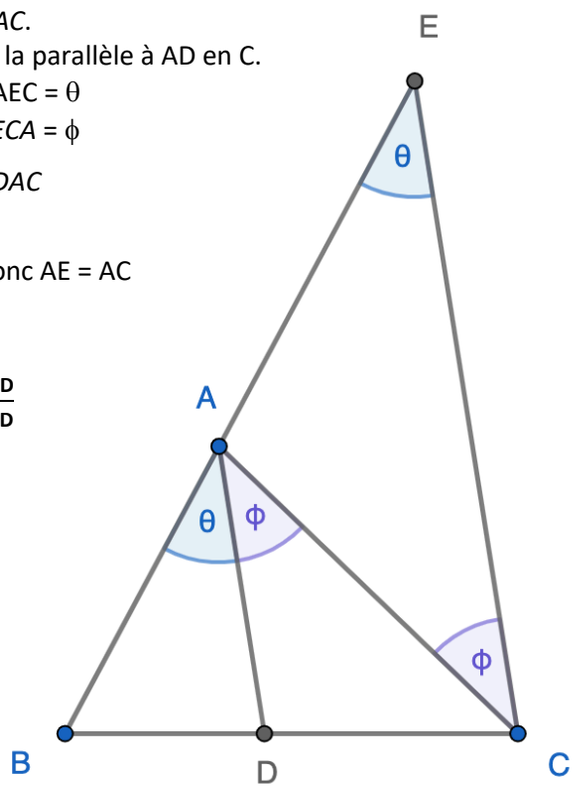
et *DAC* = *ECA* = ϕ

Comme AD est la bissectrice de *BAC* *BAD* = *DAC*
Donc $\theta = \phi$

AEC = *ECA* donc AEC est isocèle de sommet A donc AE = AC

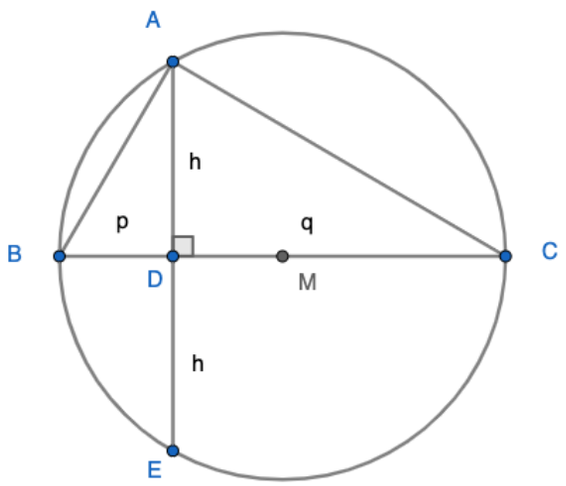
Thalès : $\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$

En remplaçant AE par AC on obtient : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



HÖHENSATZ

Dans un triangle rectangle : $pq = h^2$



Démonstration 1 par Pythagore

Dans ABD: $p^2 + h^2 = AB^2$ [1]
Dans ACD : $q^2 + h^2 = AC^2$ [2]
Dans ABC : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ [3]
[1] & [2] dans [3] : $p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = BC^2$
$p^2 + q^2 + 2h^2 = BC^2$
Par ailleurs $BC = p+q$
Donc $p^2 + q^2 + 2h^2 = (p+q)^2$
$p^2 + q^2 + 2h^2 = p^2 + 2pq + q^2$
$\mathbf{pq = h^2}$

Démonstration 2 par le Sehnensatz

En prenant les cordes AB et CE, on obtient directement du Sehnensatz p.q = h.h

THÉORÈME D'EUCLIDE - KATHETENSATZ

Dans un triangle rectangle : $AB^2 = BD \cdot BC$ & $AC^2 = CD \cdot CB$

$AB^2 = p^2 + h^2 = p^2 + pq = p\,(p+q) = p.\,BC$ $\quad AB^2 = BD \cdot BC$

$AC^2 = q^2 + h^2 = q^2 + pq = q\,(p+q) = q.\,BC$ $\quad AC^2 = CD \cdot CB$

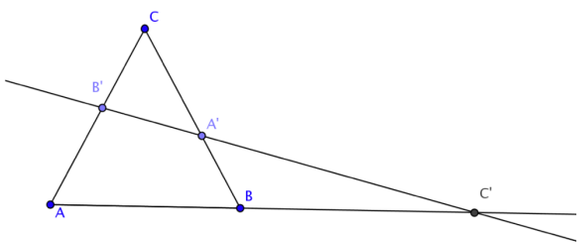
SATZ VON MENELAUS

Menelaus d'Alexandrie - mathématicien grec, ~70-140

Erfüllen drei Punkte A' ∈ BC, B' ∈ AC und C' ∈ AB die Beziehung: $\frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{B'A}{B'C} = 1$

dann liegen die drei Punkte auf einer Geraden (A', B', C' sind kollinear)

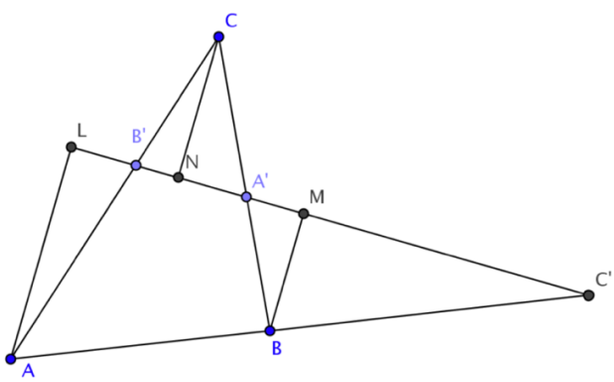
Beweis



Wir beweisen zuerst den Kehrsatz des Satzes von Menelaus.

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit B' auf [AC] und A' auf [BC].
C' ist der Schnittpunkt von AB und B'A'.

Wir fällen die Lote aus A, B, C auf A'B'.
L, M, N sind die Schnittpunkte.
Nach dem Strahlensatz gilt:



Da BM // CN $\quad \frac{A'C}{A'B} = \frac{CN}{BM} \quad [1]$

Da BM // AL $\quad \frac{C'B}{C'A} = \frac{BM}{AL} \quad [2]$

Da CN // AL $\quad \frac{B'A}{B'C} = \frac{AL}{CN} \quad [3]$

[1] . [2] . [3] $\quad \frac{A'C}{A'B}\,\frac{C'B}{C'A}\,\frac{B'A}{B'C} = \frac{CN}{BM}\,\frac{BM}{AL}\,\frac{AL}{CN} = 1$

QED

Der Beweis des Satzes von Menelaus ist die Rückrichtung des obigen Beweises.
On a d'abord prouvé le théorème inverse parce que la démonstration est beaucoup plus intuitive dans ce sens.

Comment s'en rappeler ?

Honnêtement, je ne sais pas. Cette formule est difficile à mémoriser.
Si vous en avez besoin livre fermé, c'est plus facile de se rappeler de la démonstration 0 et de retrouver le résultat !

Je lance un appel à ceux qui pourraient indiquer un moyen mnémotechnique, une meilleure figure, une meilleure notation…

SATZ VON CEVA

Giovanni Ceva - mathématicien italien, 1647-1734

Sei ABC ein Dreieck mit A' ∈ BC, B' ∈ AC und C' ∈ AB.

Wenn folgende Beziehung gilt: $\frac{A'C}{A'B}\,\frac{B'A}{B'C}\,\frac{C'B}{C'A} = 1$

dann schneiden sich die Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt.

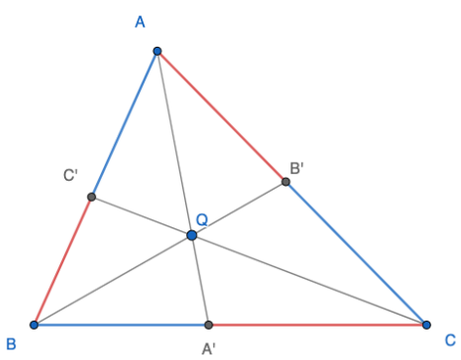
Ein grundlegender Satz für fast alle Kopunktualitätsaussagen, die sich auf Ecktransversalen beziehen.

Beweis

Wir beweisen zuerst den Kehrsatz des Satzes von Ceva.

Sei ein Dreieck ABC und Q ein *beliebiger* Punkt in diesem Dreieck.
Seien A', B' und C' die Schnittpunkte der Geraden AQ, BQ und CQ mit den Seiten des Dreiecks.
Dann gilt:

$$\frac{A'C}{A'B}\,\frac{B'A}{B'C}\,\frac{C'B}{C'A} = 1 \qquad \text{oder} \qquad A'C \cdot B'A \cdot C'B = A'B \cdot B'C \cdot C'A$$



Comment s'en rappeler ?

Là j'ai une super méthode :
on numérote les 6 segments du périmètre de 1 à 6,
en partant d'où on veut, dans le sens qu'on veut. Alors
le produit des pairs = le produit des impairs

Für das Dreieck ABA' und die Transversale CC' gilt nach dem Satz des Menelaus:

$$\frac{CA'}{CB}\,\frac{C'B}{C'A}\,\frac{QA}{QA'} = 1 \qquad [1]$$

Für das Dreieck AA'C und die Transversale BB' gilt nach dem Satz des Menelaus:

$$\frac{BC}{BA'}\,\frac{QA'}{QA}\,\frac{B'A}{B'C} = 1 \qquad [2]$$

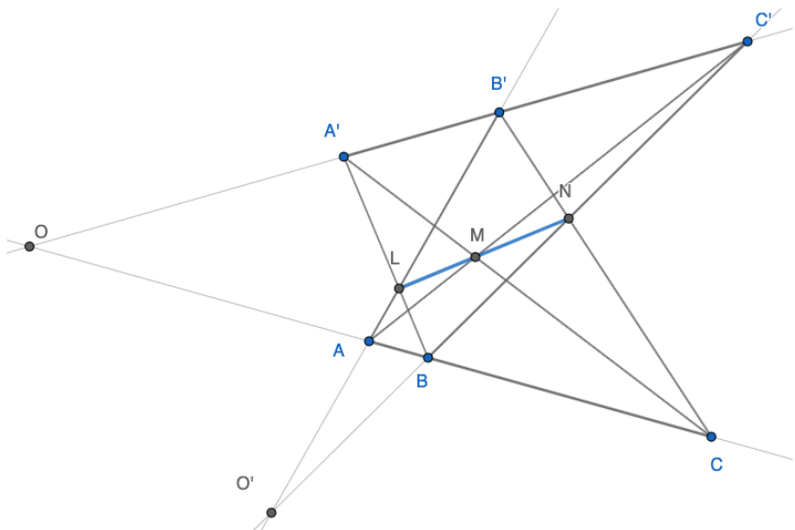
[1] . [2]
$$\frac{BC}{BA'}\,\frac{QA'}{QA}\,\frac{B'A}{B'C}\,\frac{CA'}{CB}\,\frac{C'B}{C'A}\,\frac{QA}{QA'} = \frac{A'C}{A'B}\,\frac{B'A}{B'C}\,\frac{C'B}{C'A} = 1$$

QED

Der Beweis des Satzes von Ceva ist die Rückrichtung des obigen Beweises.
On a d'abord prouvé le théorème inverse parce que la démonstration est beaucoup plus intuitive dans ce sens.

THÉORÈME DE PAPPUS

Soient trois points A, B, C alignés sur une droite Ɗ
et trois autres points A', B', C' alignés sur une droite Ɗ' sécante avec Ɗ en O.
alors les points d'intersection de (AB')-(BA'), (AC')-(CA'), (BC')-(CB') sont également alignés (s'ils existent).



Démonstration

On suppose qu'existe O' le point d'intersection de AB' et BC'.

On peut utiliser le théorème de Menelaus 7 fois :

Triangle OBC'	sécante B'NC	NC'.CB.B'O = NB.CO.B'C'
Triangle OB'A	sécante A'LB	
Triangle O'B'C'	sécante A'LB	
Triangle O'B'C'	sécante OAB	
Triangle OC'A	sécante A'MC	
Triangle O'AB	sécante B'NC	
Triangle OAB'	sécante O'BC'	

Oh que c'est pénible !

Je vous laisse remplir.

On multiplie les 7 égalités.
Après simplification il reste LO'.NC'.MA = O'N.C'M.AL

D'après le théorème de Menelaus dans O'AC' : L, M, N sont alignés.

QED

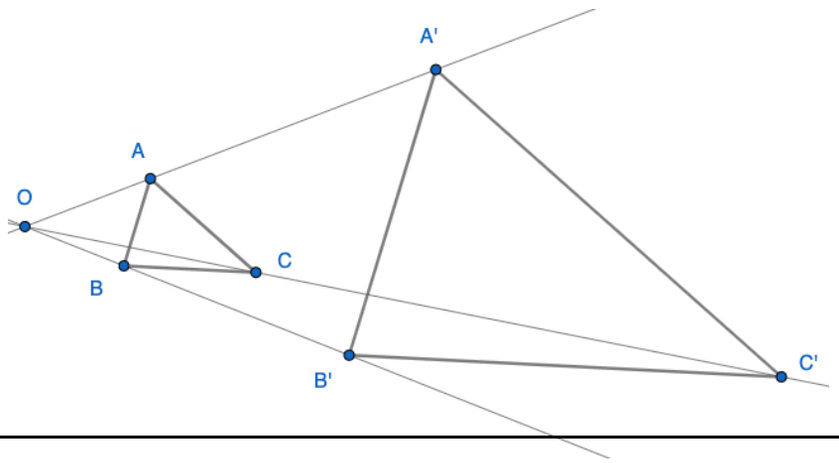
Un beau résultat.
Pour s'en rappeler : on a fait trois X entre les 2 droites.

THÉORÈME FAIBLE DE DESARGUES

Girard Desargues – architecte et mathématicien français, 1591 - 1661

Soient D_1, D_2, D_3 trois droites distinctes concourantes ou parallèles
Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que A et A' soient sur D_1, B et B' soient sur D_2, C et C' soient sur D_3

Si AB // A'B' et AC // A'C' alors BC // B'C'



Réciproquement

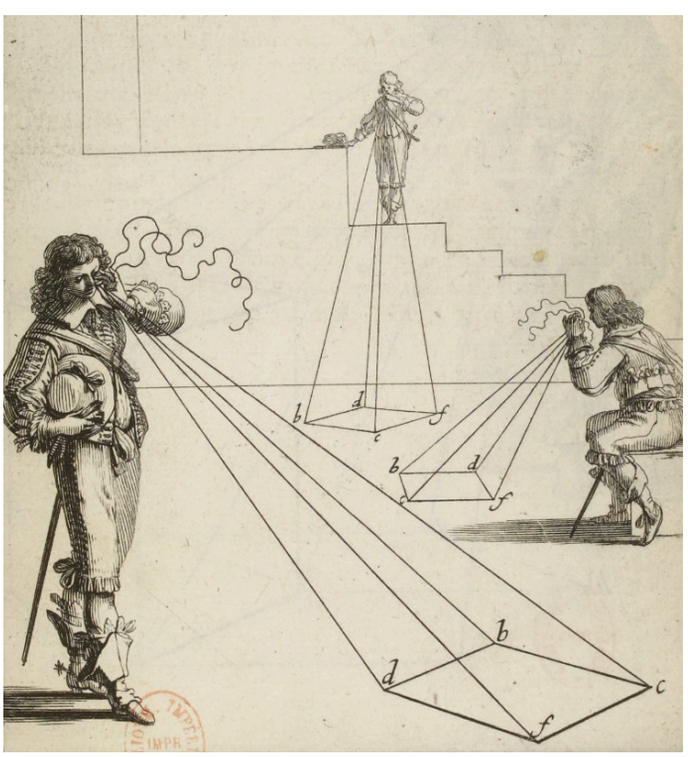
Soient D_1, D_2, D_3 trois droites distinctes
Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que A et A' soient sur D_1, B et B' soient sur D_2, C et C' soient sur D_3

Si AB // A'B', AC // A'C', BC // B'C' alors D_1, D_2, D_3 sont concourantes ou parallèles.

Démonstration – *cas des 3 droites concourantes*

Soit O le point de concours de D_1, D_2, D_3
AB //A'B' : Thales : OA/OA' = OB / OB'
AC //A'C' : Thales : OA/OA' = OC / OC'

Donc OB / OB' = OC / OC'
Par la réciproque de Thalès : BC / B'C'



Démonstration de la réciproque

Supposons que AA' et BB' sont sécantes.
Soit O leur point d'intersection.
Soit M sur (OC) tel que A'M // AC.
Les conditions du sens direct sont réalisées, avec M à la place de C' dans les notations précédentes : on a alors MB' // CB.
Il n'existe qu'un seul point situé
- sur la parallèle à AC passant par A' et
- sur la parallèle à BC passant par B'
Ce point est C'.
Donc M et C' sont confondus et
les points OCC' sont alignés.

QED

MÉDIANES

Dans un triangle ABC, la **médiane** issue de A est la droite qui relie A et le milieu de [BC].

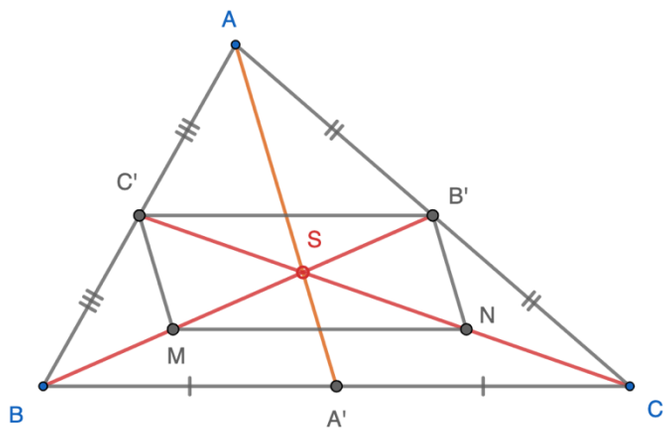
Dans un triangle quelconque, les 3 médianes concourent en un même point :
le CENTRE DE GRAVITÉ ou ISOBARYCENTRE du triangle.

On le note **S** pour Schwerpunkt. Les Français l'appellent souvent G.

Démonstration 1

Soit S le point d'intersection de (BB') et (CC')
Soit M le milieu de [BS] et N le milieu de [CS]
D'après le théorème de la droite des milieux dans ABC :
(C'B') // (BC) et C'B' = ½ BC
D'après le théorème de la droite des milieux dans BCS :
(MN) // (BC) et MN = ½ BC
Donc MNB'C' est un parallélogramme.
Alors SM = SB' = ½ BS et **BS = 2/3 BB'** [1]

Soit S' le point d'intersection de (AA') et (CC')
On montre alors comme précédemment que
AS' = 2/3 AA' et **BS' = 2/3 BB'** [2]



[1] et [2] : BS = 2/3 BB' = BS' : S et S' sont sur [BB'] à la même distance de B. Donc S = S'
Les trois médianes sont donc concourantes et se coupent aux 2/3 de leur longueur.

AS = 2/3 AA'	**ou**	**AS = 2 SA'**
BS = 2/3 BB'	**ou**	**BS = 2 SB'**
CS = 2/3 CC'	**ou**	**CS = 2 SC'**

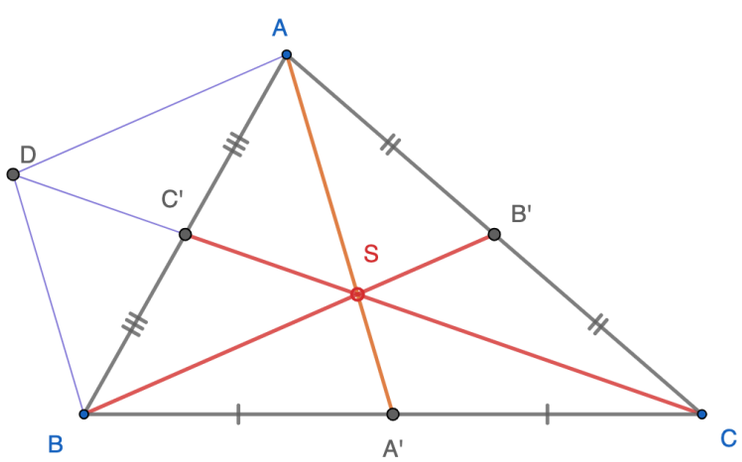
Démonstration 2

Soit S l'intersection des médianes (AA') et (CC')
Soit D le symétrique de S par rapport à C'.
ADBS est un parallélogramme
Thalès dans BCD avec BD // A'S :
CS/CD = CA'/CB = ½
donc CD = 2 CS [1]

CD = CS + SC' +C'D = CS + 2 SC' [2]
[1] & [2] CS + 2 SC' = 2 CS
CS = 2 SC'
Donc CC' = CS + SC' = CS + ½ CS = 3/2 CS

Soit S' l'intersection des médianes (AA') et (BB')
On montre comme ci-dessus que CC' = 3/2 CS'

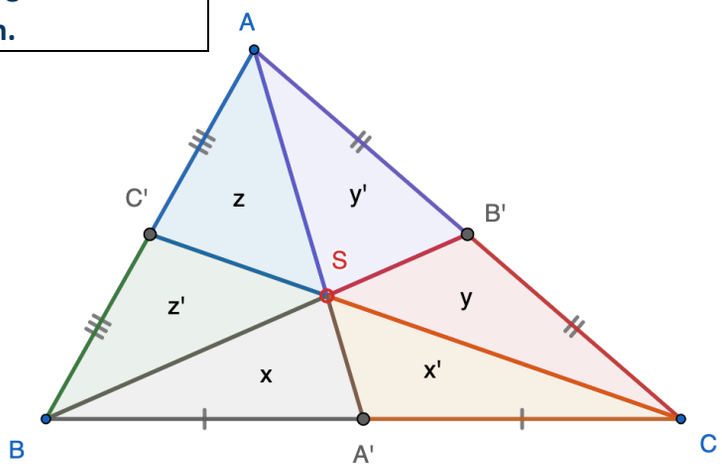
Donc S = S'.



Démonstration 3

(BA'.CB'.AC') / (A'C.B'A.C'B) = 1 Par Ceva : les médianes sont cosécantes.

Die Seitenhalbierenden teilen das Dreieck ABC in 6 Teildreiecke, die die gleiche Fläche haben.



Beweis 1

Fläche eines Dreiecks XYZ = F_{XYZ}
$x = F_{BSA'}$ $x' = F_{CSA'}$
$y = F_{CSB'}$ $y' = F_{ASB'}$
$z = F_{ASC'}$ $z' = F_{BSC'}$
Wir wollen zeigen, dass $x = x' = y = y' = z = z'$

Die Fläche eines Dreiecks ist ½ . Grundseite . Höhe

Betrachten wir die Dreiecke ACC' und BCC'.
Sie haben eine gemeinsame Höhe h: das Lot von C auf AB.
Also: $F_{ACC'} = ½ . AC' . h$ und $F_{BCC'} = ½ . BC' . h$
Da C' der Mittelpunkt von AB ist, haben wir AC' = BC', und $F_{ACC'} = F_{BCC'}$
Das heißt $y+y'+z = x+x'+z'$ [1]

Betrachten wir die Dreiecke ASC' und BSC'.
Sie haben eine gemeinsame Höhe h': das Lot von S auf AB.
Also: $F_{ASC'} = ½ . AC' . h'$ und $F_{BSC'} = ½ . BC' . h'$
Da C der Mittelpunkt von AB ist, haben wir AC' = BC', und $F_{ASC'} = F_{BSC'}$
Das heißt $z = z'$

Analog beweist man $x = x'$ und $y = y'$
Gleichung [1] vereinfacht sich zu: $2y + z = 2x + z$ also $2y = 2x$ und $y = x$.

Analog beweist man $z = y$.

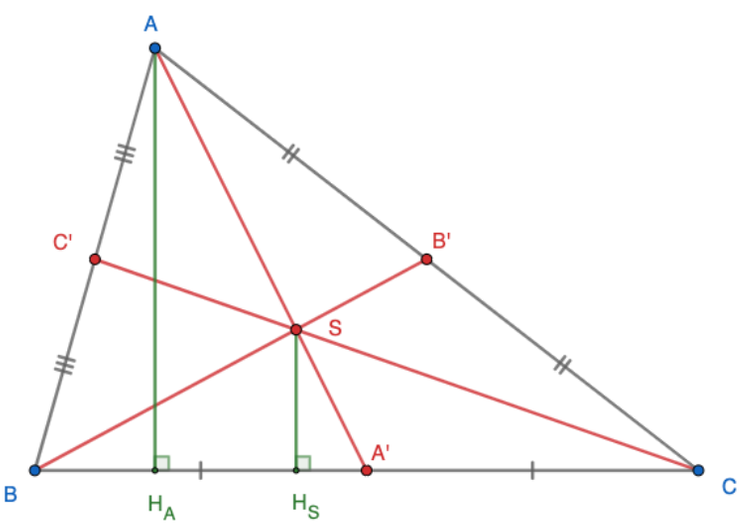
Damit ist $x = x' = y = y' = z = z'$ *QED*

Démonstration 2

Une propriété du centre de gravité S est que SA' = 1/3 AA'.
Les projetés orthogonaux de A et S sur [BC] sont H_A et H_S. Alors AH_A // SH_S.
D'après le théorème de Thalès dans AH_AA' avec AH_A // SH_S : A'S / AA' = SH_S / AH_A = 1/3

Par ailleurs BA' = ½ BC.
L'aire de BA'S vaut ½ de la base x 1/3 de la hauteur = 1/6 de l'aire de ABC.

Le raisonnement est le même pour chacun des 5 autres petits triangles.



HAUTEURS

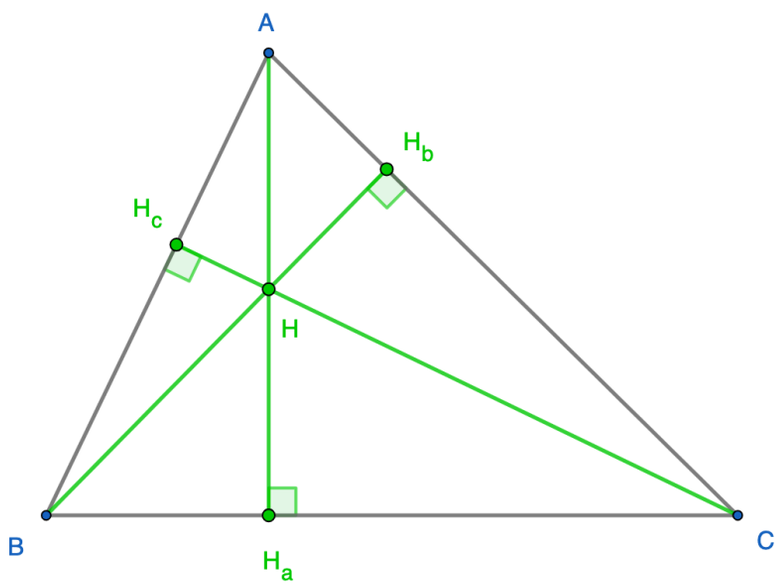
Dans un triangle ABC, la **hauteur** issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A.

Dans un triangle quelconque les 3 hauteurs concourent en un même point :
l'ORTHOCENTRE du triangle.

Die 3 Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt: der Höhenschnittpunkt des Dreiecks.

Der Höhenschnittpunkt wird mit H bezeichnet.

Die Fußpunkte der Höhen nennen wir H_a, H_b und H_c.



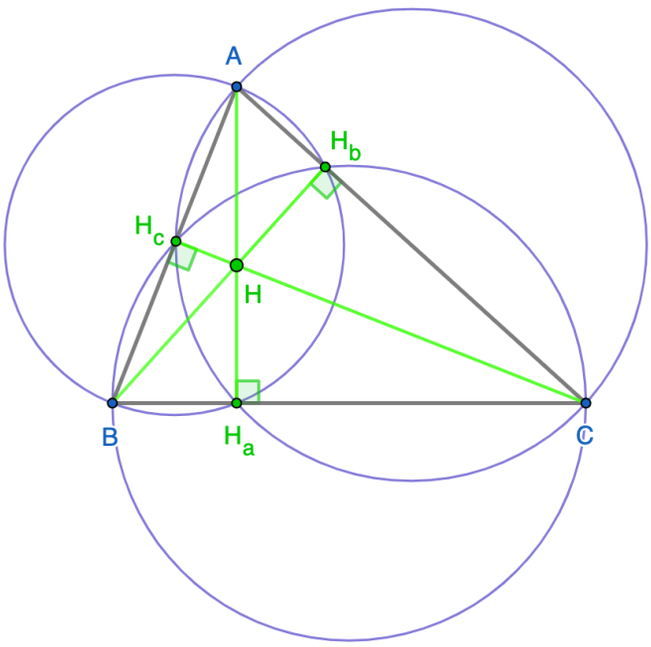
Les programmes scolaires de géométrie s'arrêtent en général là pour ce qui est des hauteurs.
Elles sont cosécantes… la belle affaire !
En gros, on dirait un truc quasi inutile ; le parent pauvre de la famille I-U-S-H…

Les pages qui suivent vont certainement bouleverser définitivement cette vue des choses.

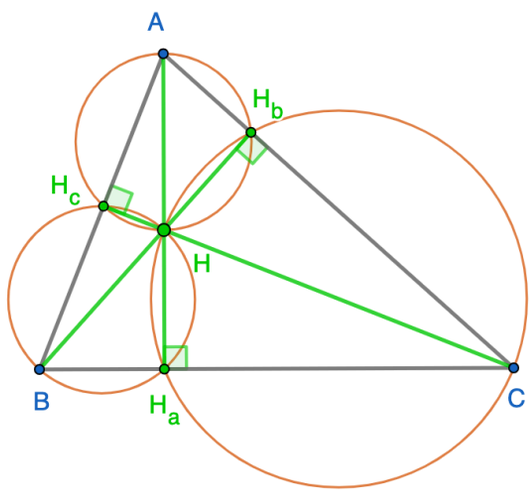
Pour commencer il y a une multitude de triangles semblables et de cocyclités…

H DÉFINIT 6 CERCLES AYANT CHACUN 4 POINTS COCYCLIQUES

Les trois cercles de diamètre AB, AC, BC



Les trois cercles de diamètre AH, BH, CH



Le théorème de l'angle inscrit nous donne 5 relations d'angle pour chacun de ces cercles.

Ça nous fait 30 relations d'angle !

Exemples

Pour le cercle de diamètre BC

Théorème de l'angle inscrit sur la corde CHb	$CHcHb = CBHb$
Théorème de l'angle inscrit sur la corde HbHc	$HbCHc = HbBHc$
Théorème de l'angle inscrit sur la corde BHc	$HcCB = HcHbB$
Théorème de l'angle inscrit sur la corde BC	$CHbB = CHcB = 90$
Théorème de l'angle inscrit sur la corde BHb	$HbHcB = 180 - HbCB = 180 - \beta$

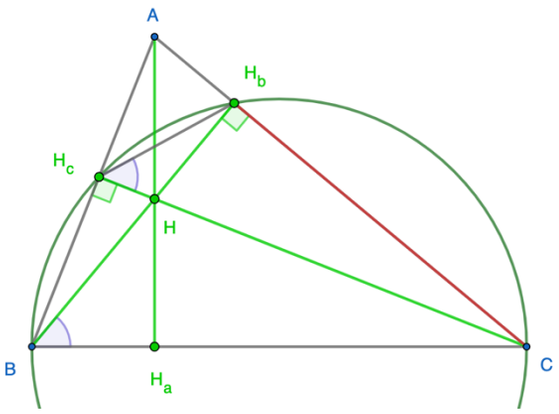
Pour le cercle de diamètre AH

Théorème de l'angle inscrit sur la corde HHb	$HAHb = HHcHb$
Théorème de l'angle inscrit sur la corde AHb	$HbHcA = HbHA$
Théorème de l'angle inscrit sur la corde AHc	$AHHc = AHbHc$
Théorème de l'angle inscrit sur la corde AH	$HHcA = HHbA = 90$
Théorème de l'angle inscrit sur la corde HbHc	$\alpha = HcAHb = 180 - HbHHc$

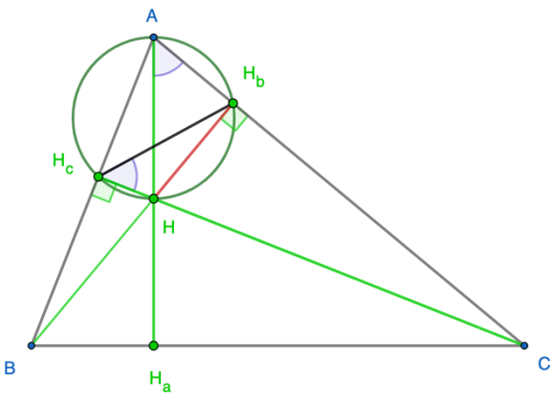
PREUVE DE LA CONCOURANCE DES HAUTEURS

1ère démonstration par chasse aux angles

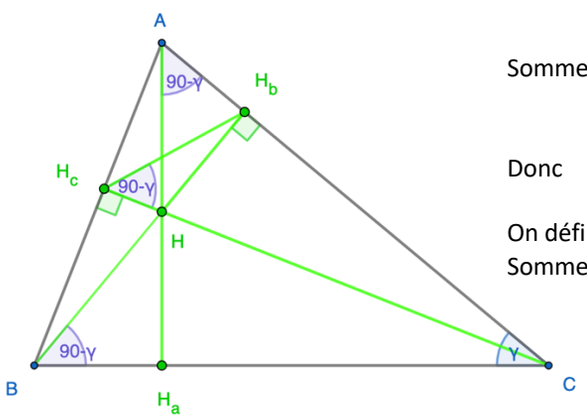
On définit H comme l'intersection de (BH_B) et (CH_C).
On veut montrer que (AH) ⊥ (BC).



B, H_c, H_b et C sont cocycliques donc d'après le th. de l'angle inscrit sur la corde CH_b : $\widehat{CBH_b} = \widehat{CH_cH_b} = \phi$



A, H_b, H et H_c sont cocycliques donc d'après le th. de l'angle inscrit sur la corde HH_b : $\widehat{HH_cH_b} = \widehat{HAH_b} = \phi$

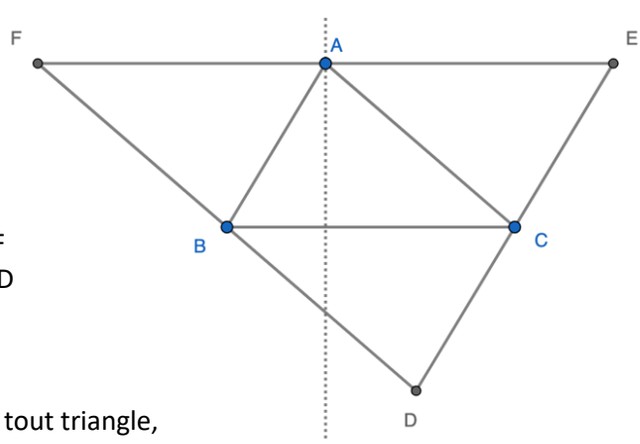


Somme des angles de BCH_b : $\phi + \gamma + 90 = 180$
$\phi = 90 - \gamma$

Donc $\widehat{HAC} = \phi = 90 - \gamma$

On définit H_A comme l'intersection de (AH) et (BC).
Somme des angles de ACH_a : $\widehat{CH_AA} + 90 - \gamma + \gamma = 180$
$\mathbf{\widehat{CH_AA} = 90}$

2nde démonstration avec le triangle antimédial



On construit le triangle DEF tel que DE // AB passant par C,
DF // AC passant par B , EF // BC passant par A.
DEF s'appelle le triangle **antimédial** de ABC.
Par construction ACBF est un parallélogramme donc AC = BF
Par construction ABDC est un parallélogramme donc AC = BD
Donc BF = BD et B est le milieu de [DF].
De même A est le milieu de [EF] et C est le milieu de [ED].
Donc les hauteurs de ABC sont les médiatrices de DEF.
Or on montre (dans quelques pages) que les médiatrices de tout triangle, donc celles de DEF, sont concourantes.
Les hauteurs de ABC sont donc concourantes.

Au passage on a montré que H est le centre du cercle circonscrit du triangle antimédial de ABC.

H DÉFINIT 6 PAIRES ET UN QUADRUPLET DE TRIANGLES SEMBLABLES

Premier groupe de 3 paires de triangles semblables

HAHb ~ HBHa **HBHc ~ HCHb** **HCHa ~ HAHc**

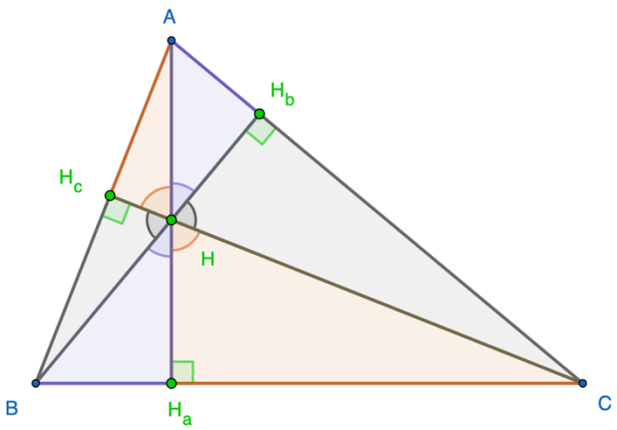
W:W:W - sie stimmen in den Winkeln bei H und in den rechten Winkeln überein.

Daher ist $AH / HH_b = BH :/ HH_a$
also $AH . HH_a = BH . HH_b$

Analog findet man $BH . HH_b = CH . HH_c$

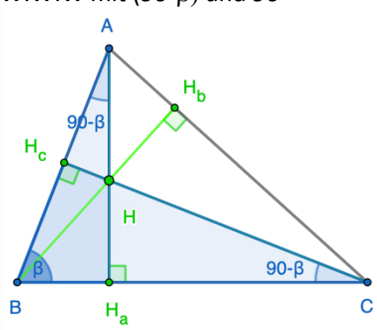
D'où cette formule de longueur utile :

$$\mathbf{HA . HH_a = HB . HH_b = HC . HH_c}$$

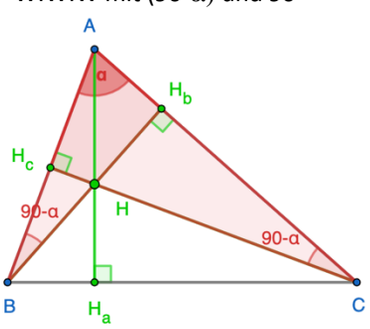


Deuxième groupe de 3 paires de triangles semblables

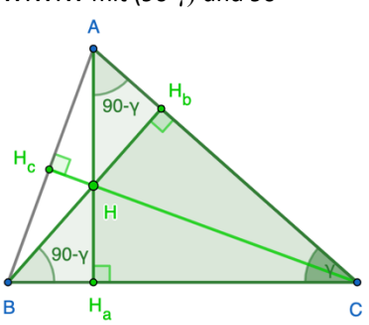
ABHa ~ CBHc
W:W:W mit (90-β) und 90



BAHb ~ CAHc
W:W:W mit (90-α) und 90



BCHb ~ ACHa
W:W:W mit (90-γ) und 90

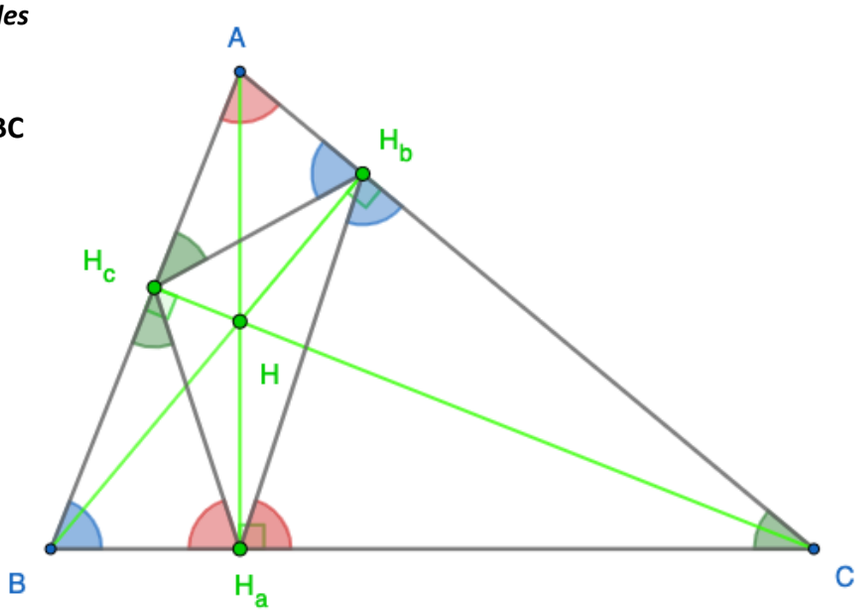


Le quadruplet de triangles semblables

AHbHc ~ BHaHc ~ CHaHb ~ ABC

W:W:W avec α, β, γ
(voir page suivante)

Tiens, cool le graphe !
Sauf pour les daltoniens…
On voit clairement que les hauteurs
sont les bissectrices du triangle au milieu…
Donc H sera le centre de son cercle inscrit…
Si on lui donnait un nom.
Quelle bonne idée…



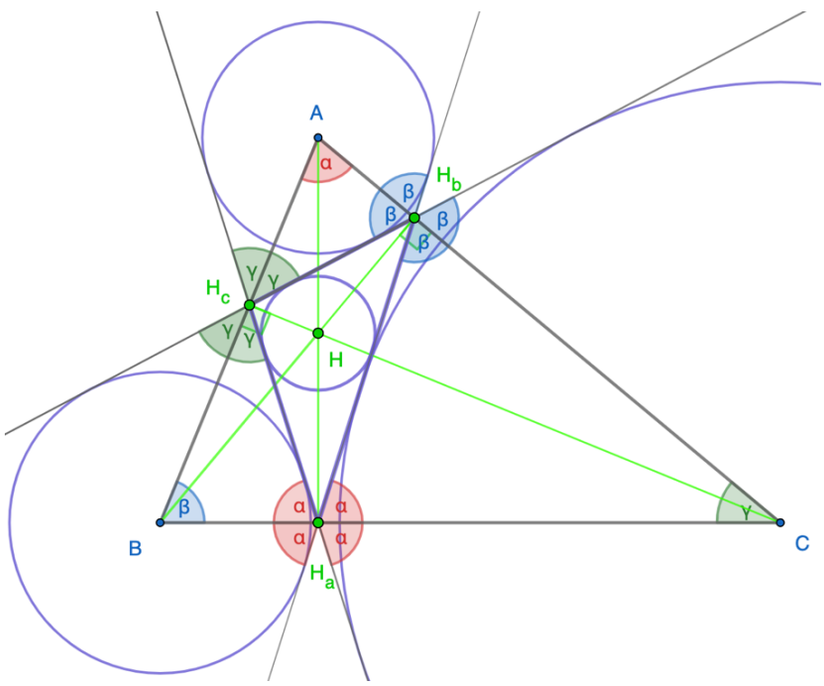
LE TRIANGLE ORTHIQUE - DAS HÖHENFUßPUNKTDREIECK

Soit H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs issues des sommets A, B, C d'un triangle acutangle.
Le triangle $H_aH_bH_c$ s'appelle **triangle orthique**.

H est le centre du cercle inscrit du triangle orthique
i.e. les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle orthique
Les sommets A, B, C sont les centres des cercles exinscrits du triangle orthique

H_a, H_b und H_c sind die Fußpunkte der Höhen des *spitzwinkligen* Dreiecks ABC.
Das Dreieck $H_aH_bH_c$ heißt ***Höhenfußpunktdreieck*** des Dreiecks ABC.

H ist der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks
&
Die Ecken A, B, C sind die Ankreismittelpunkte des Höhenfußpunktdreiecks



Beweis

H_b und H_c liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke BC: BH_cH_bC ist ein Sehnenviereck.
Nach dem Sehnenviereckssatz gilt also $\gamma = BCH_b = 180 - BH_cH_b$
Da $180 - BH_cH_b = H_bH_cA$ erhalten wir $\gamma = H_bH_cA$
Ähnlich finden wir $\gamma = BH_cH_a$ Also ***$H_bH_cA = BH_cH_a = \gamma$***
(AB) und (CH) sind die Außen- bzw. Innenwinkelhalbierende von $H_aH_cH_b$
Ähnlich finden wir
(BC) und (AH) sind die Außen- bzw. Innenwinkelhalbierenden von $H_cH_aH_b$
(CA) und (BH) sind die Außen- bzw. Innenwinkelhalbierenden von $H_aH_bH_c$

H ist der Schnittpunkt der Innenwinkelhalbierenden AH, BH, CH und ist also der Inkreismittelpunkt von $H_aH_bH_c$.

A ist der Schnittpunkt der Außenwinkelhalbierenden AB, AC, und der Innenwinkelhalbierende AH und ist also der A-Ankreismittelpunkt von $H_aH_bH_c$.
Ähnlich ist B der B-Ankreismittelpunkt und C ist der C-Ankreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks $H_aH_bH_c$.

QED

H commence à commander le respect ?
Maintenant c'est Monsieur H pour vous. Et on n'a pas fini …

Dans un triangle quelconque, les rayons AU, BU, CU du cercle circonscrit sont orthogonaux aux côtés du triangle orthique :

$AU \perp H_bH_c$
$BU \perp H_cH_a$
$CU \perp H_aH_b$

Démonstration

Soit X l'intersection de (AU) et (H_bH_c) Y celle de (BU) et (H_aH_c)

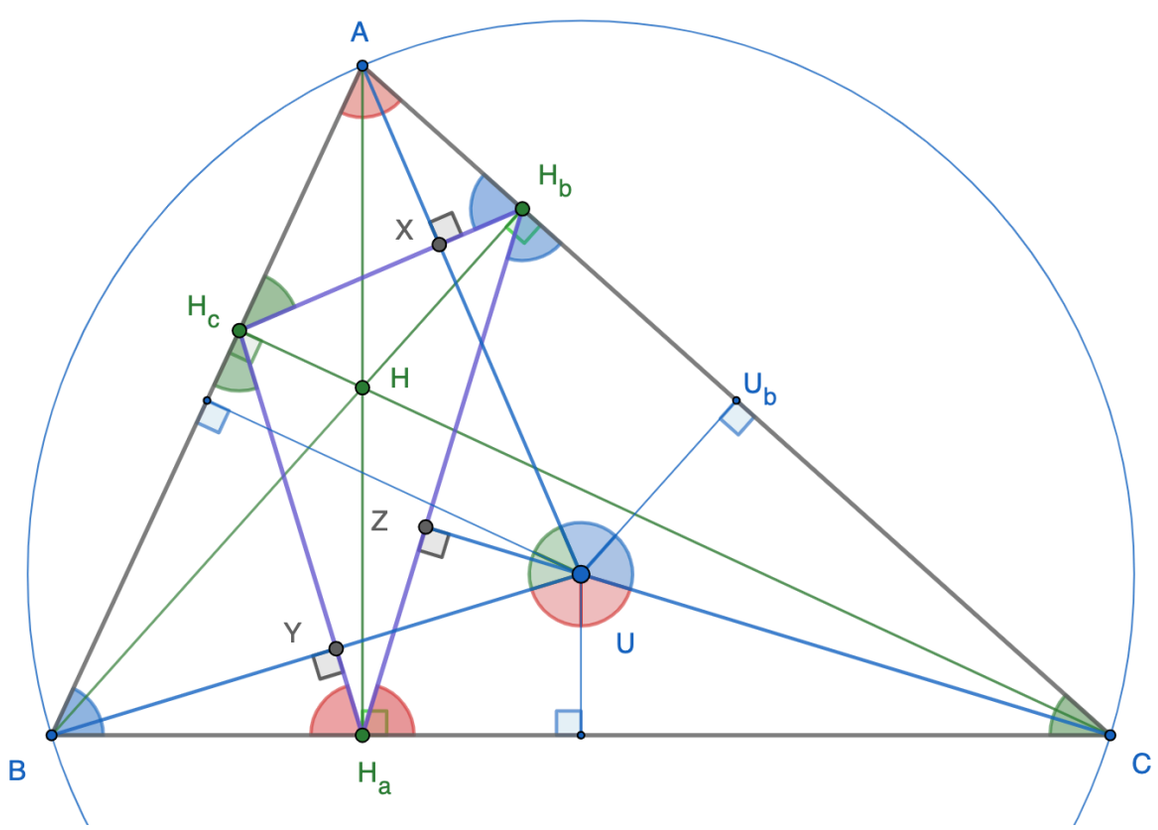
UA = UB = UC UAC est isocèle
Somme des angles de UAC : $180 = 2\,UAC + CUA$ $UAC = 90 - \frac{1}{2}\,CUA$
Théorème de l'angle inscrit sur la corde [AC] du cercle circonscrit : $CUA = 2\,CBA = 2\beta$
$UAC = 90 - \beta$ donc $XAH_b = 90 - \beta$

On a déjà montré que $AHbHc = \beta$ donc $AH_bX = \beta$

Somme des angles de AXH_b :
$AXH_b = 180 - XAH_b - AH_bX = 180 - (90 - \beta) - \beta = 90$
Donc **$AU \perp H_bH_c$**

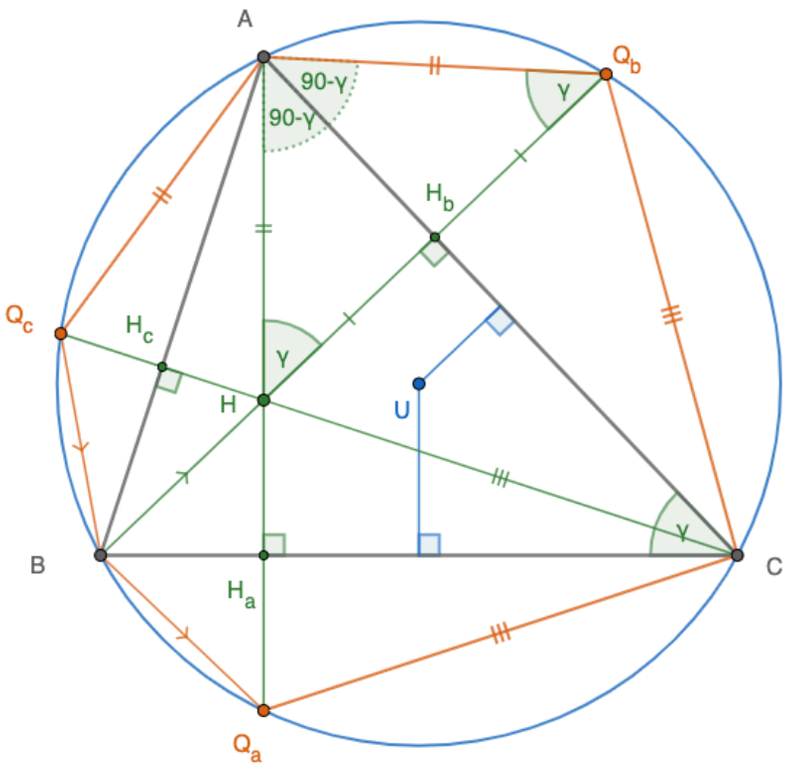
On montre comme ci-dessus que $HaBY = 90 - \alpha$
On a déjà montré que $YHaB = \alpha$
La somme des angles dans BYHa donne $BYHa = 90$
Donc **$BU \perp H_aH_c$**

QED



Les symétriques de H par rapport aux 3 côtés du triangle sont sur son cercle circonscrit

Soient Q_a Q_b Q_c sont les symétriques de H par rapport à (BC), (AC) et (AB).



Démonstration

ACHa est rectangle en Ha donc *HAC* = 90 - γ
AQbHb est rectangle en Hb donc *AQbHb* = γ
Ainsi *AQbB* = *ACB*
donc par le théorème de l'angle inscrit
(cercle circonscrit et corde [AB])
les points A, B, C, Qb sont cocycliques.

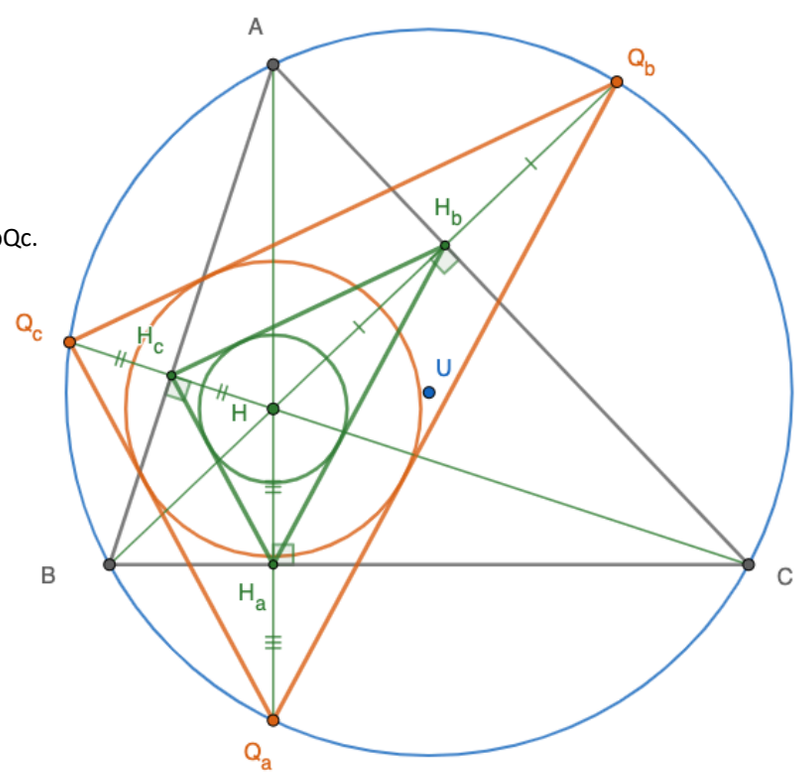
On montre de façon similaire que
A, B, C, Qa sont cocycliques
et que A, B, C, Qc sont cocycliques.

QED

En plus d'être le centre du cercle inscrit du triangle orthique $H_AH_BH_C$, H est le centre du cercle inscrit de $Q_AQ_BQ_C$

QaQbQc est l'image de HaHbHc par l'homothétie de centre H et de rapport 2.

Comme l'homothétie conserve les angles,
les hauteurs de ABC sont aussi
les bissectrices de QaQbQc
donc H est le centre du cercle inscrit de QaQbQc.

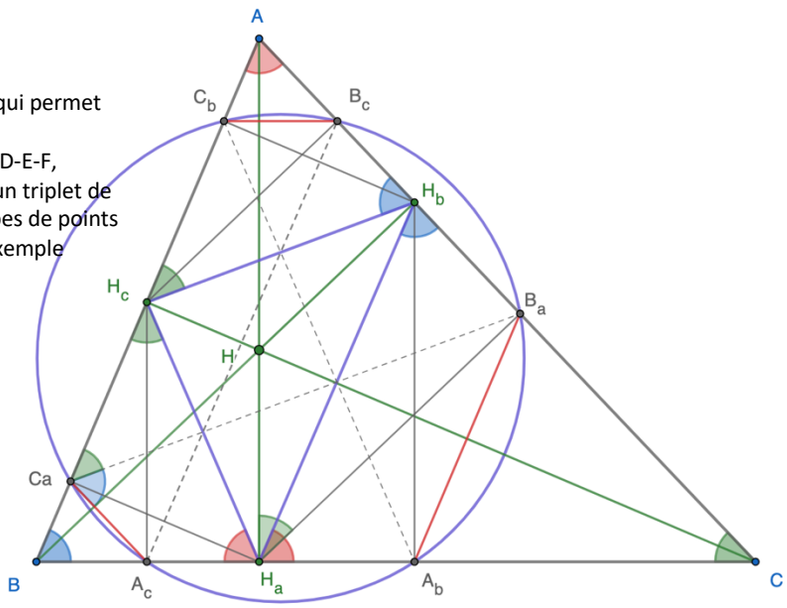


LE CERCLE DE TAYLOR - DER TAYLOR-KREIS

Wir fallen von jedem Höhenfußpunkt zwei Lote auf die beiden Nachbarseiten: die ***Nebenhöhen*** des Dreiecks. Wir erhalten sechs Nebenhöhenfußpunkte. Bezeichnung: siehe Figur.

Die 6 Nebenhöhenfußpunkte liegen auf einem Kreis - der *Taylor-Kreis* des Dreiecks

Point méthode
On a avec le théorème de l'angle inscrit un outil qui permet de montrer la cocyclité de 4 points.
Si on veut montrer la cocyclité de 6 points A-B-C-D-E-F, comme un cercle est défini de façon unique par un triplet de points, il suffit de montrer la cocyclité de 3 groupes de points qui - deux à deux - ont 3 points communs : par exemple (ABCD), (BCDE) et (CDEF).



Beweis – auf Winkeljagd

In ABH_a ist $AH_aB_a = 90 - H_aAB = 90 - H_aAC$
In AH_aC ist $ACH_a = 90 - H_aAC$
Daher ist $AH_aB_a = ACH_a = \gamma$

Die Punkte B_a und C_a liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke AH_a: $AC_aH_aB_a$ ist ein Sehnenviereck
Nach dem Peripheriewinkelsatz $AC_aB_a = AH_aB_a$, also $AC_aB_a = \gamma$

Wie haben schon gesehen: $\gamma = AH_cH_b$ und $\alpha = BH_aH_c$

Die Punkte C_a und A_c liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke H_cH_a: $H_cC_aA_cH_a$ ist ein Sehnenviereck
Nach dem Peripheriewinkelsatz $A_cC_aH_c = 180 - A_cH_aH_c = 180 - BH_aH_c = 180 - \alpha$
Also ist $A_cC_aB_a = A_cC_aH_c - AC_aB_a = (180 - \alpha) - \gamma = \beta$

Genauso finden wir $B_aA_bA_c = 180 - \beta$
Damit ist $AcCaBa + BaAbAc = \beta + (180 - \beta) = 180$
Also ist $A_cC_aB_aA_b$ ein Sehnenviereck — **A_b**, **B_a**, **A_c**, C_a liegen auf einem Kreis K1.

Analog bekommen wir $CB_cA_c = \beta$, also $B_aB_cA_c = \beta$
Andererseits ist $B_aA_bA_c = 180 - \beta$. Also ist $B_aB_cA_c + B_aA_bA_c = \beta + (180 - \beta) = 180$
und $A_bA_cB_cB_a$ ist ein Sehnenviereck — **A_b**, **B_a**, **A_c**, **B_c** liegen auf einem Kreis K2.

Analog beweisen wir — **A_b**, **B_a**, **B_c**, C_b liegen auf einem Kreis K3.

K1 und K2 haben 3 gemeinsame Punkte und stimmen also überein.
K2 und K3 haben 3 gemeinsame Punkte und stimmen also überein.
Dann stimmen die drei Kreise überein: die sechs Punkte A_b, B_a, A_c, B_c, C_a, C_b liegen auf einem Kreis.

Bonus Les 6 points forment un hexagone inscrit dans le cercle de Taylor
B_cC_b // BC, C_aA_c // CA, A_bB_a // AB; $A_cC_aH_c = 180 - \alpha$ oder $A_cC_aA = 180 - C_aAC$; woraus folgt C_aA_c // CA
Analog ergibt sich B_cC_b // BC und A_bB_a // AB

MÉDIATRICES

La **médiatrice** d'un segment [AB] est la perpendiculaire à (AB) passant le milieu de [AB].

Un point appartient à la médiatrice de [AB] *ssi* il est équidistant de A et de B.

Dans un triangle quelconque, les 3 médiatrices concourent en un même point :
le centre du CERCLE CIRCONSCRIT du triangle.

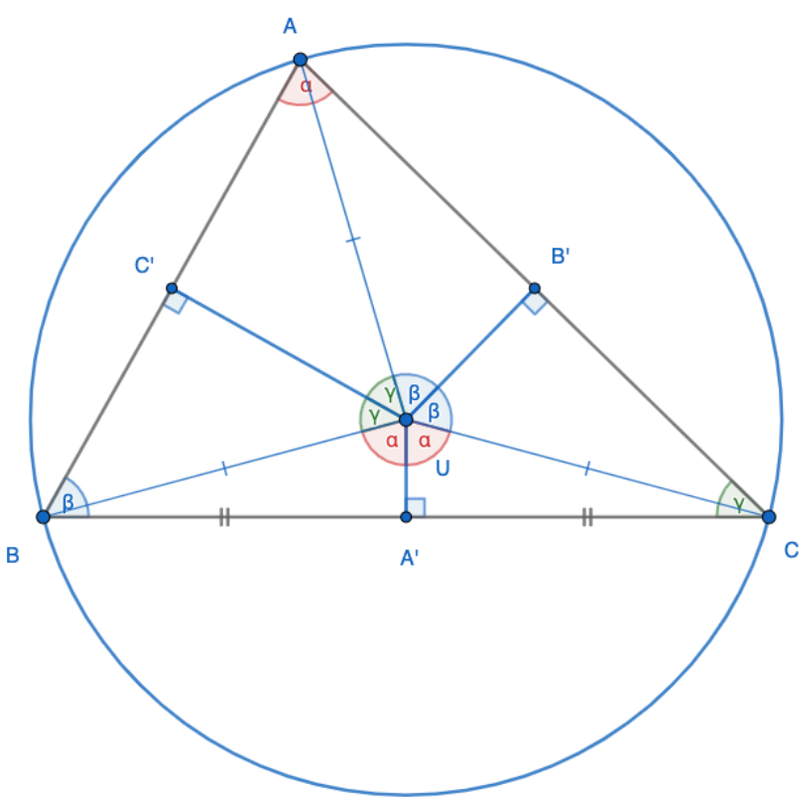
Démonstration

UAC isocèle : UA = UC
UAB isocèle : UA = UB
UA = UB = UC : U est le centre du cercle passant par A, B et C.

Die 3 Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt:
der **Umkreismittelpunkt U**.

Attention : U est souvent noté O en France.

Les 6 angles autour de U :
Angle au centre *BUC* = 2 . angle inscrit *BAC* = α
et *BUA'* = *A'UC* car BCU est isocèle.



BISSECTRICES

La **bissectrice** d'un angle est la demi-droite qui le partage en 2 angles adjacents égaux.

Un point appartient à la bissectrice d'un angle *ssi* il est équidistant des 2 côtés de l'angle.

Dans un triangle quelconque, les 3 bissectrices intérieures concourent en un même point : le centre du CERCLE INSCRIT dans le triangle.

Le cercle inscrit dans le triangle est tangent aux trois côtés du triangle.

Démonstration

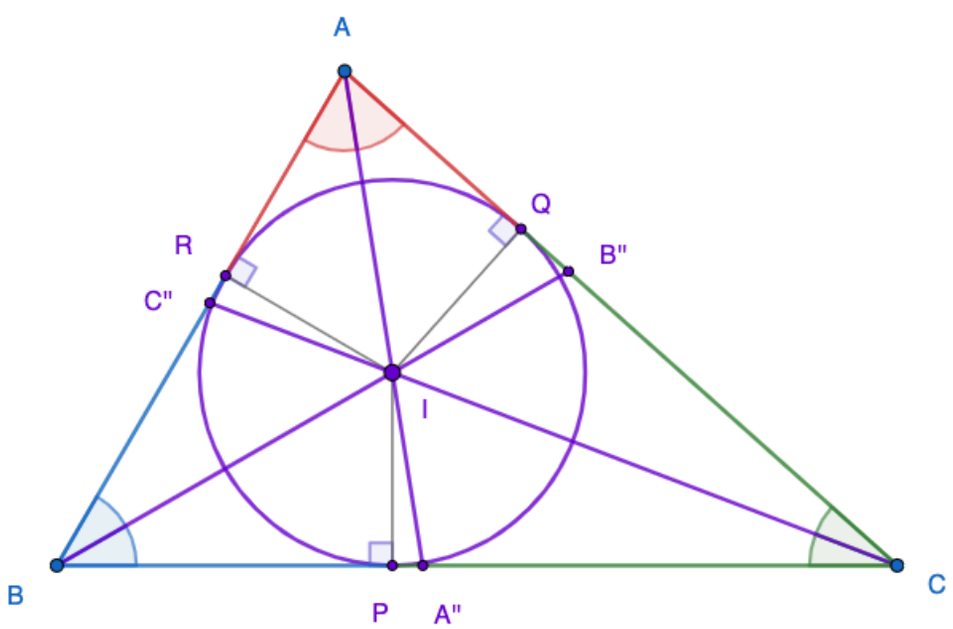
Soit un triangle quelconque ABC.
On définit I comme l'intersection des bissectrices AA'' et CC''.

P, Q et R sont les projetés de I sur [BC], [AC] et [AB].
Montrons que BI est sa troisième bissectrice.

Propriété des tangentes : AR = AQ BP = BR CP = CQ

SWS (AR = AQ + angle rouge commun + AI commun) AIQ et AIR sont similaires donc IQ = IR
SWS (CQ = CP + angle vert commun + CI commun) CIQ et CIP sont similaires donc IQ = IP
Donc IP = IQ = IR
Donc I est à égale distance de BA et de BC : I est sur la bissectrice en B.
BI est bien la troisième bissectrice.

Die 3 Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt: der Inkreismittelpunkt **I.**



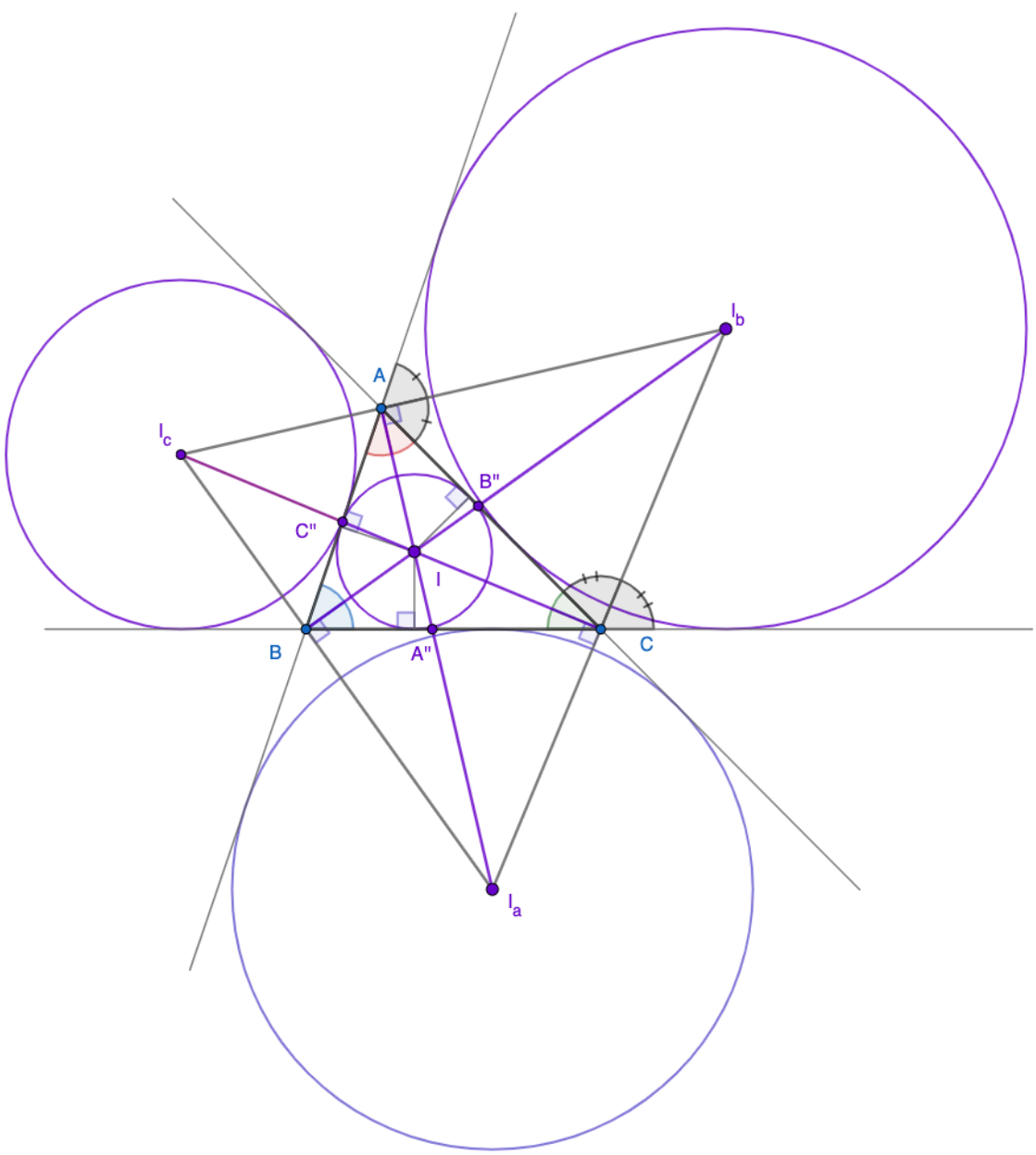
LES 3 CERCLES EXINSCRITS

Dans un triangle quelconque, une bissectrice intérieure et ses deux bissectrices extérieures concourent en un même point : le centre d'un des trois CERCLES EXINSCRITS du triangle.

Die Außenwinkelhalbierenden *zweier* beliebiger Winkel eines Dreiecks und die Innenwinkelhalbierende des *dritten* Winkels schneiden sich in einem Punkt.
Dieser Punkt heißt ein ***Ankreismittelpunkt*** des Dreiecks,
und zwar der zu der Ecke des dritten Winkels gehörende Ankreismittelpunkt.

Analog zu dem Inkreismittelpunkt ist jeder Ankreismittelpunkt der Mittelpunkt eines Kreises, der die Seiten des Dreiecks ABC berührt, aber diesmal berührt jeder dieser drei Kreisen je eine Seite als Strecke und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten.
Diese drei Kreise heißen die **Ankreise** des Dreiecks ABC.

Le cercle exinscrit situé en face du sommet A est dit **A-exinscrit**.



Die Außenwinkelhalbierenden der Winkel bei A und bei B und die Innenwinkelhalbierende des Winkels bei C schneiden sich in einem Punkt: der zu der Ecke C gehörende Ankreismittelpunkt des Dreiecks ABC.
Bezeichnen wir ihn mit I_C.
Wir bezeichnen mit I_A, I_B, I_C die Ankreismittelpunkte, die zu A, B, C gehören.
Wir bezeichnen mit I der Inkreismittelpunkt von ABC.

- I und I_A liegen beide auf der Innenwinkelhalbierenden des Winkels *CAB*
- I_B und I_C liegen beide auf der Außenwinkelhalbierenden des Winkels *CAB*, und
- da die Innenwinkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende eines Winkels immer zueinander orthogonal sind, (II_A) und (I_BI_C) schneiden sich in A und sind zueinander orthogonal.

Entsprechend erkennt man:
II_B und I_CI_A schneiden sich in B und sind zueinander orthogonal,
II_C und I_AI_B schneiden sich in C und sind zueinander orthogonal.

Also sind II_A, II_B und II_C die Höhen von $I_AI_BI_C$, und I ist der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks.
Andererseits sind die Geraden II_A, II_B und II_C die Innenwinkelhalbierenden des Dreiecks ABC.

Die Innenwinkelhalbierenden eines Dreiecks ABC sind die Höhen des Dreiecks aus den Ankreismittelpunkten.
Der Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks aus den Ankreismittelpunkten.

ABC est le triangle orthique de $I_AI_BI_C$.

Remarque

Der Schwerpunkt und der Inkreismittelpunkt liegen stets im Inneren des Dreiecks.
Die drei Ankreismittelpunkte liegen stets außerhalb des Dreiecks.
Der Höhenschnittpunkt liegt innerhalb des spitzwinkligen Dreiecks, außerhalb des stumpfwinkligen Dreiecks, oder an die Ecke mit dem rechten Winkel des rechtwinkligen Dreiecks.

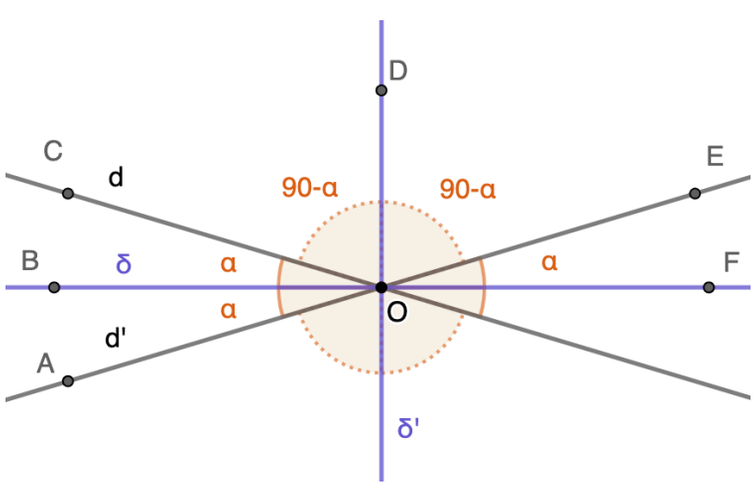
BISSECTRICES INTÉRIEURE ET EXTÉRIEURE

Tout couple de droites sécantes d et d' n'a pas une, mais deux bissectrices.
Dans l'exemple ci-dessous, *COA* a bien sur la bissectrice δ : c'est la **bissectrice intérieure**.
Quand on parle de bissectrice sans plus de précision, c'est celle à laquelle on réfère.
Mais il y a aussi la **bissectrice extérieure** δ' :celle qui coupe *EOC*.

Les bissectrices intérieure et extérieure sont perpendiculaires.

Démonstration :

FOB = 180 = 2 COB + 2 DOC
DOC = 90 – COB
DOB = DOC + COB = 90



LE THÉORÈME DES BISSECTRICES 2.0

Soit AA'' la A-bissectrice intérieure d'un triangle ABC.
On a vu avec le théorème de la bissectrice que
BAA'' =A''AC = *DCA* = *ADC* = α /2 ; ACD isocèle et Thalès dans BCD avec AA'' // DC :
b/c = v/u = CA'' / BA''

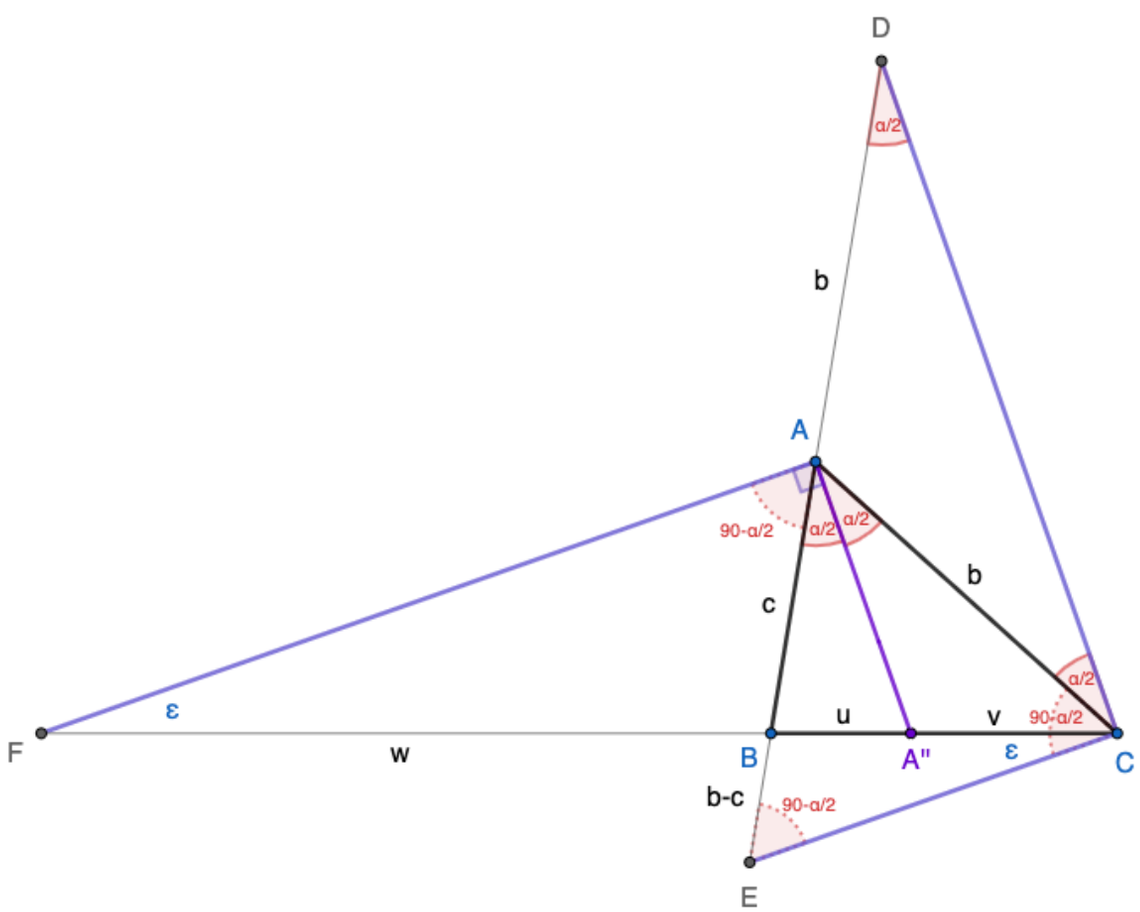
Cette relation est plus qu'un petit théorème sympa :
c'est la **propriété fondamentale des pieds des bissectrices du triangle**.

Soit AF la bissectrice extérieure de *BAC.*
AA'' ⊥ AF alors *FAB* = 90 - α /2
Soit E l'intersection de la parallèle à AF passant par C et AB.
Par les angles alterne-interne *CEA* = 90 - α /2
La somme des angles de AEC implique alors *ACE* = 90 - α /2
AEC est isocèle : AC = AE et donc BE = b-c

On utilise la forme croisée du théorème de Thalès avec AF // CE :
BC / BF = BE / BA
a/w = (b – c)/c
a/w = b/c - 1
b/c = (a+w)/w = FC / FB

Les bissectrices intérieure & extérieure découpent le côté opposé dans le rapport des cotés adjacents
Sowohl die Innen- als auch die Außen-Winkelhalbierenden teilen die gegenüberliegende Seite
im Verhältnis der anliegenden Seiten - *falls diese unterschiedliche Längen haben.*

b/c = AC / AB = CA'' / BA''= FC / FB

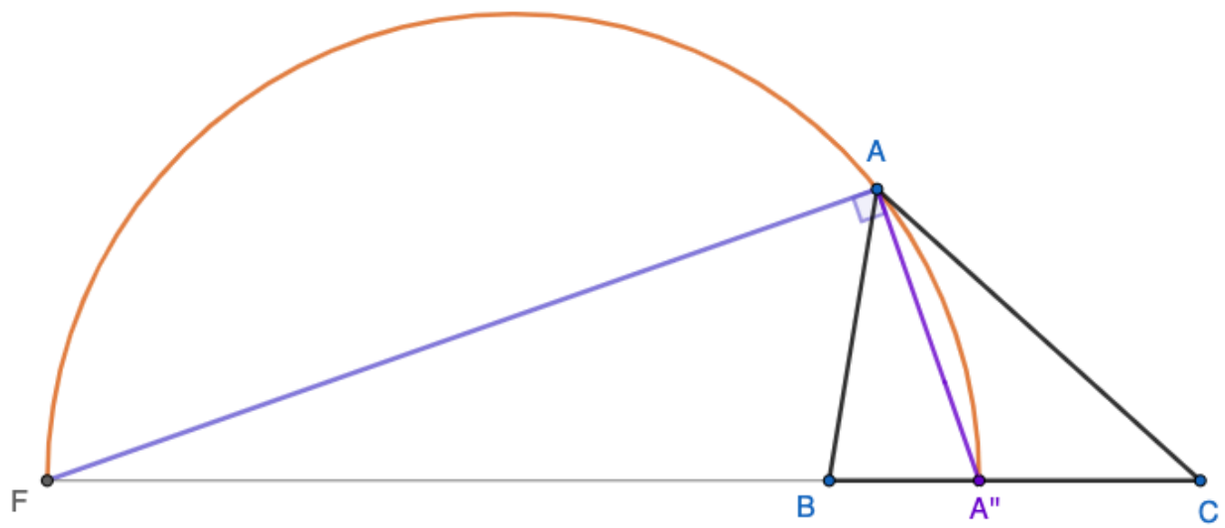


CERCLE D'APOLLONIUS

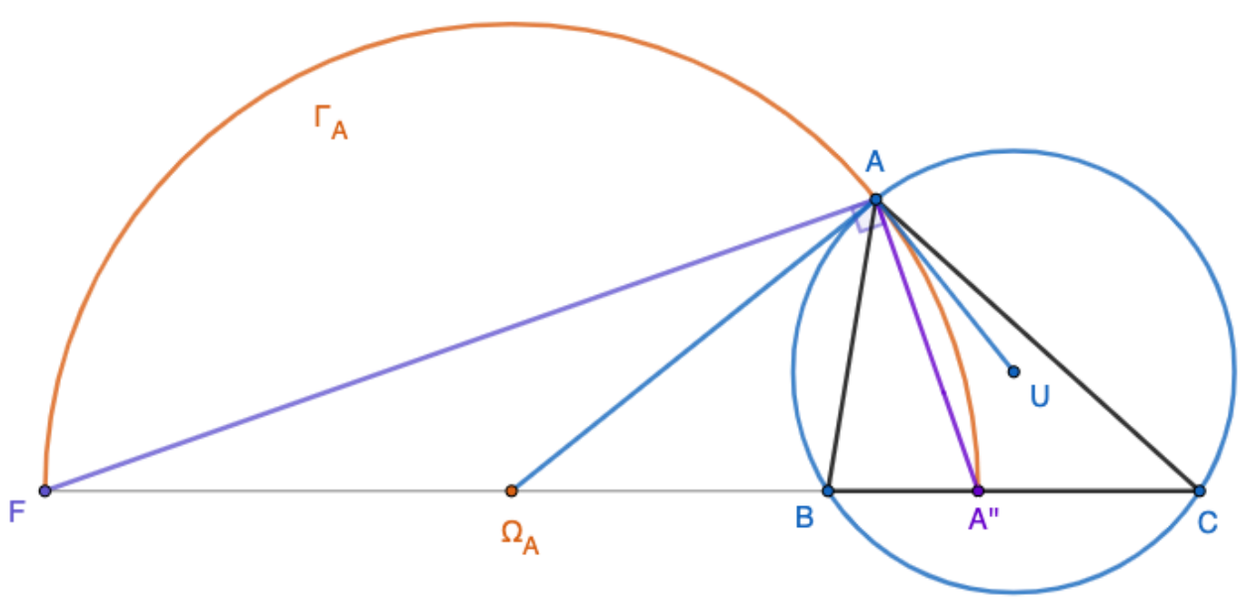
Changeons maintenant de perspective par rapport à la situation de la page précédente :

au lieu de partir du triangle ABC, cherchons quel est
l'ensemble des points A remplissant la condition AB / AC = c/b

Avec B, C, A'', F donnés,
comme AA'' ⊥ AF c'est que A est sur le cercle de Thalès de diamètre A''F.
Γ_A de centre Ω_A est le
A-cercle d'Apollonius du triangle ABC.



Dessinons (ABC) le cercle circonscrit à ABC de centre U.
Alors UA ⊥ AΩ_A
(ABC) et Γ_A sont orthogonaux.

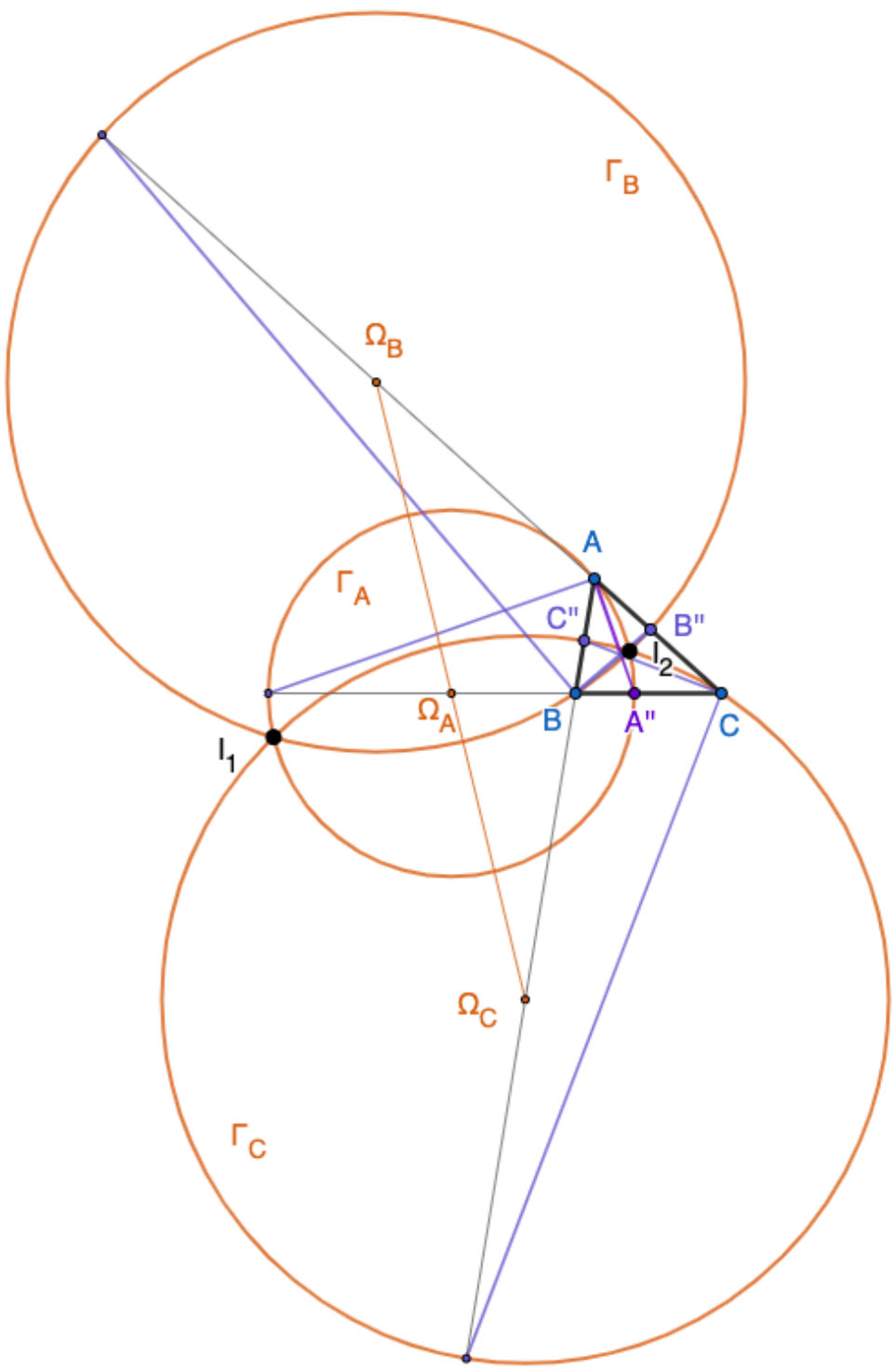


POINTS ISODYNAMIQUES

Pour un triangle ABC traçons ses 3 cercles d'Apollonius.

Γ_A de centre Ω_A est le A-cercle d'Apollonius du triangle ABC = Ensemble des points R vérifiant b BR = c CR
Γ_B de centre Ω_B est le B-cercle d'Apollonius du triangle ABC = Ensemble des points Q vérifiant a AQ = c CQ
Γ_C de centre Ω_C est le C-cercle d'Apollonius du triangle ABC = Ensemble des points P vérifiant a AP = b BP

Ces 3 cercles sont sécants en deux points I_1 et I_2 : les **points isodynamiques du triangle ABC**
I_1 et I_2 sont symétriques par rapport à la droite $(\Omega_A\ \Omega_B\ \Omega_C)$.



DIVISION HARMONIQUE & CERCLE D'APOLONIUS

Pour les réels a, b, c **a est la moyenne harmonique de b et c si** $\mathbf{2/a = 1/b + 1/c}$

Les points A, B, C, D ainsi ordonnés sur une droite sont dits en division harmonique
si $\overline{AB}$ est moyenne harmonique de $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$: $\mathbf{2 / \overline{AB} = 1 / \overline{AC} + 1 / \overline{AD}}$
Cette relation dite de Descartes se transforme en BA / BC = DA / DB

Ceci nous amène à une seconde approche pour arriver au cercle d'Apollonius.

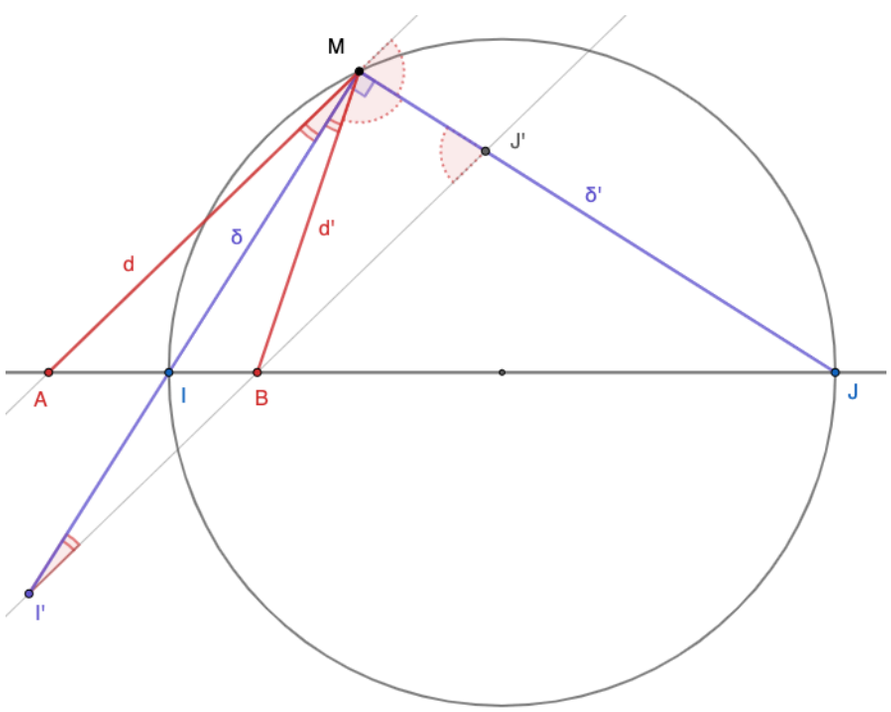
Deux droites d et d' et leurs deux bissectrices δ et δ' forment un faisceau harmonique (d, d', δ, δ').

Si d et d' sont les deux côtés issus de M d'un triangle ABM, les bissectrices intérieure δ et extérieure δ' coupent AB en I et J. Alors I et J divisent harmoniquement [AB]. I et J sont dits **conjugués harmoniques** par rapport à A et B.

Soit *AMI* = α δ étant les bissectrices de d et d', *IMB* = α
Soit I' le point de δ tel que I'B // AM.
Par les angles alterne-interne *MI'B* = α Alors I'BM est isocèle en B : **BI' = BM**

Les bissectrices internes et externes étant perpendiculaires : δ et δ' sont perpendiculaire.
Alors les angles pointillés valent tous 90 - α J'BM est isocèle en B : **BJ' = BM**

Thalès dans JMA avec BJ' // AM JA / JB = MA / J'A = MA / MB
Thalès dans ABMI' avec I'B / AM IA / IB = MA / I'B = MA / MB donc **IA / IB = JA / JB = MA / MB**



A et B étant donnés, l'ensemble des points M tels que MA/MB = k (k constante ≠ 1) est donc un cercle de diamètre [IJ], où I et J divisent harmoniquement [AB].

Si k > 0, k ≠ 1, I et J sont les deux seuls points de la droite (AB) tels que IA / IB = JA / JB = k

M étant fixé, ce cercle est le **cercle d'Apollonius du triangle ABM.**

LA DROITE D'EULER - DIE EULER-GERADE

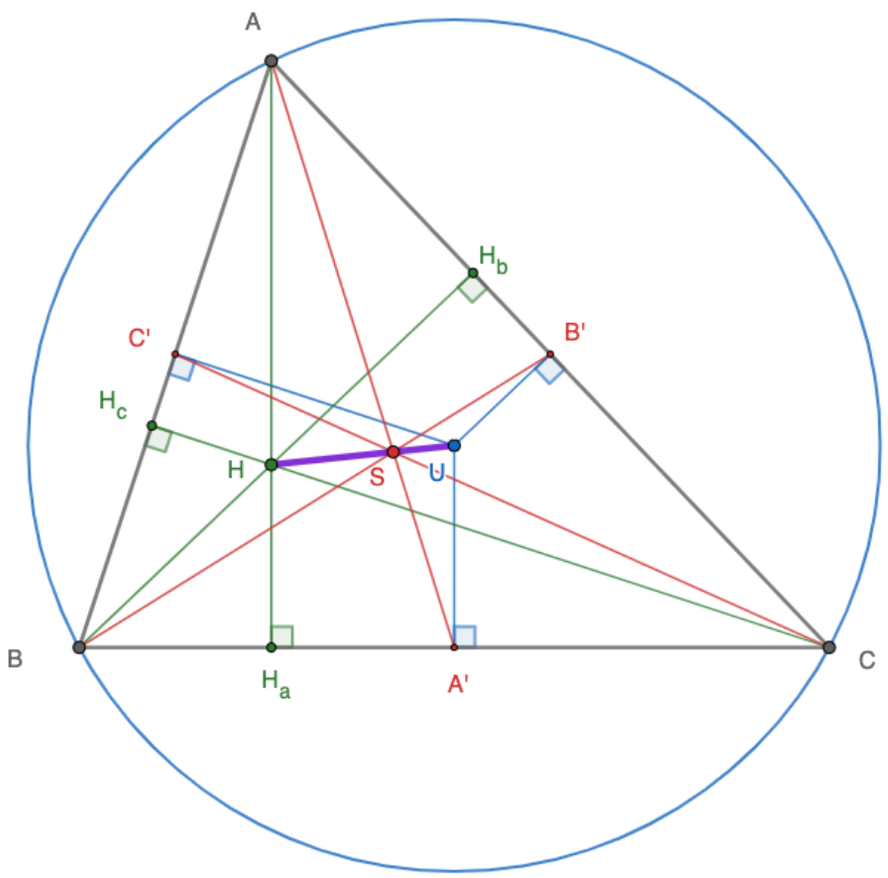
Leonhard Euler - mathématicien et physicien suisse, 1707-1783

Satz von Euler

Der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt U eines beliebigen Dreiecks liegen auf einer Geraden.

S liegt zwischen H und U und es gilt HS = 2 SU

Die Figur zeigt die Höhen, die Seitenhalbierenden und die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC.
Die Gerade durch H, S und U heißt die ***Euler-Gerade*** des Dreiecks ABC.



Beweis

Es sei H' der eindeutig definierte Punkt auf (SU) für den gilt H'S = 2 SU wobei S zwischen H' und U liegt.
Wir werden zeigen, dass H' mit H übereinstimmt.

H' ist so definiert, dass H'S / SU = 2 Eine Eigenschaft des Schwerpunktes ist AS / SA' = 2
Nach dem Strahlensatz (Kreuzform) folgt AH' // A'U
Da A'U die Mittelsenkrechte von BC ist, haben wir A'U ⊥ BC und folglich AH' ⊥ BC.
H' liegt also auf der von A ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC.

Analog beweist man, dass H' auf der von B ausgehenden Höhe und auf der von C ausgehenden Höhe liegt.

Damit ist H' der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, also H' = H.

Folglich liegt H auf der Geraden SU, HS = 2 SU, und S liegt zwischen H und U.

QED

Wir haben nebenbei einen dritten Beweis erbracht, dass die Höhen eines Dreiecks einen gemeinsamen Schnittpunkt haben:

Als wir H' einführten, war die Existenz von H nicht bekannt.
Als wir zeigten, dass H' zu allen drei Höhen gehört, kam implizit als Bonus, dass die drei Höhen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Man kann den Satz von Euler auch so formulieren:
U ist das Bild von H bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor -½.

Es folgt direkt :

$$\mathbf{AH = 2\,A'U \qquad BH = 2\,B'U \qquad CH = 2\,C'U}$$

Der Abstand einer Ecke zu H ist doppelt so groß wie der Abstand von U zur gegenüberliegenden Seite.

Pour ceux qui ne sont pas encore top à l'aise avec les homothéties, la preuve par Thalès :

Nach dem Satz von Euler liegen H, S, U auf einer Geraden und HS / SU =2
A, S, A' liegen auf einer Geraden und AS / SA' = 2
Nach dem Strahlensatz ist also AH // A'U und AH = 2 A'U
Analog findet man BH = 2 B'U und CH = 2 C'U.

A'U ist die Mittelsenkrechte von BC, also A'U ⊥ BC und das Dreieck BA'U ist rechtwinklig.

Nach dem Satz von Pythagoras in BA'U	$UB^2 = A'U^2 + BA'^2$
Mit R Umkreisradius des Dreiecks ABC	$UB = R$
Wir haben gerade bewiesen, dass	$A'U = ½\ AH$
A' ist der Mittelpunkt von BC also	$BA' = ½\ a$
Folglich haben wir	$R^2 = (½\ AH)^2 + (½\ a)^2$
	$AH^2 + a^2 = 4\ R^2$
Analog zeigt man in AB'U	$BH^2 + b^2 = 4R^2$
und in BC'U	$CH^2 + c^2 = 4R^2$

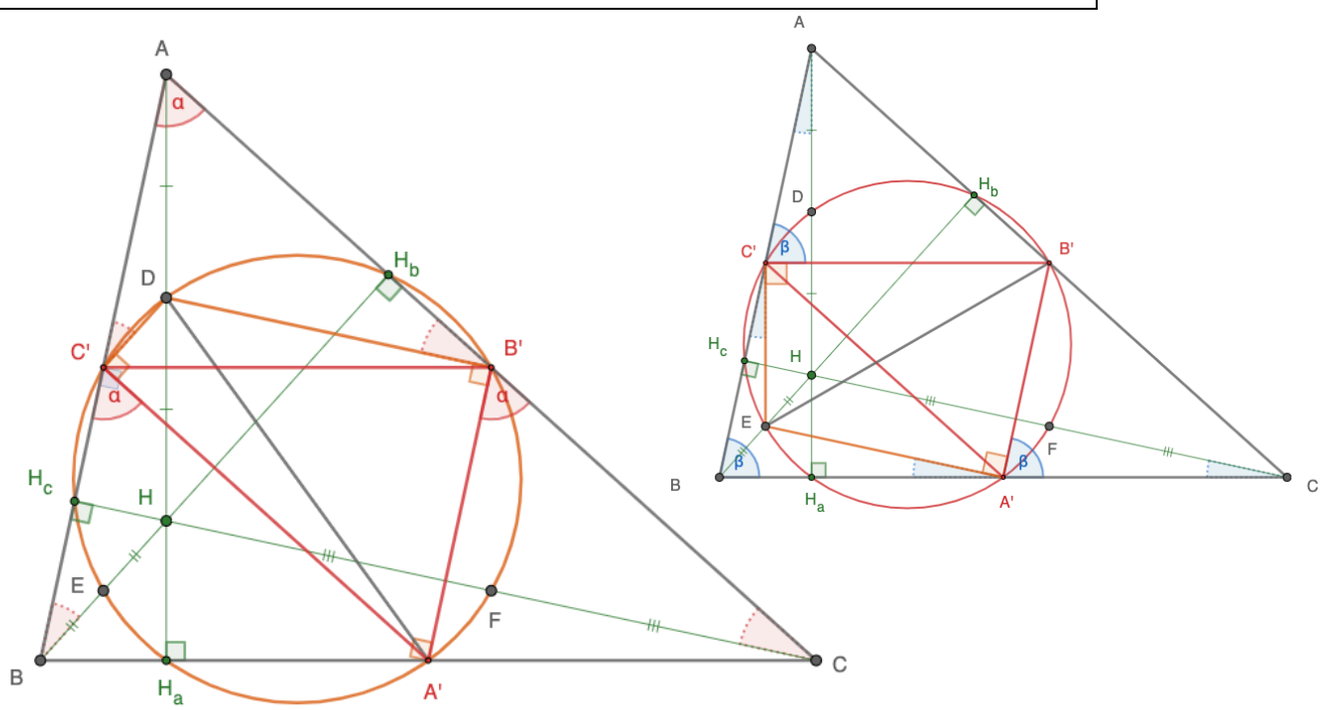
$$\mathbf{AH^2 + a^2 = BH^2 + b^2 = CH^2 + c^2 = 4R^2}$$

LE CERCLE D'EULER – DER FEUERBACH-KREIS – CERCLE DES NEUFS POINTS

Sei ABC ein beliebiges Dreieck. Dann liegen auf demselben Kreis:
die Seitenmitten A', B', C'
die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c und
die Mittelpunkte D, E und F der Strecken AH, BH und CH

Dieser Kreis heißt der **Feuerbach-Kreis** oder **Euler-Kreis**, oder **Neunpunktekreis**.

Die Punkte D, E und F heißen **Euler-Punkte** des Dreiecks ABC.



Beweis

A' = m [BC] B' = m[AC] C' = m [AB]
Der Mittelparallelensatz in ABC ergibt **AC // A'C'** und **AB // A'B'** also $BC'A' = A'B'C = \alpha$

C' = m [AB] und D = m [AH] In ABH ist C'D die Mittelparallele: **C'D // BH**
B' = m [BC] und D = m [AH] In ACH ist B'D die Mittelparallele: **B'D // CH**

In ABH_b $H_bBA = 90 - \alpha$ Wegen C'D // BH $DC'A = H_bBA = 90 - \alpha$
In ACH_c $ACH_c = 90 - \alpha$ Wegen B'D // CH $AB'D = ACH_c = 90 - \alpha$

Die flachen Winkeln $AC'B$ und $AB'C$ setzen sich je aus 3 Winkeln zusammen:

$AC'B = 180 = DC'A + A'C'D + BC'A'$ $AB'C = 180 = AB'D + DB'A' + A'B'C$
$180 = 90 - \alpha + A'C'D + \alpha$ $180 = 90 - \alpha + DB'A' + \alpha$
$A'C'D = 90$ [1] $DB'A' = 90$ [2]

Wegen der Definition von D und H_a ist $A'H_aD = 90$ [3]

[1], [2] & [3] [A'D] ist die Diagonale eines Thales Kreises auf dem die Punkte C', B' und H_a liegen. H_a und D liegen auf dem Kreis K durch die Punkte A', B', C'.
Mit β statt α zeigt man: [B'E] ist die Diagonale eines Thales Kreises auf dem die Punkte A', C' und H_b liegen.
(kleine Figur) H_b und E liegen auf dem Kreis K.
Mit γ statt α zeigt man: [C'F] ist die Diagonale eines Thales Kreises auf dem die Punkte A', B' und H_c liegen. H_c und F liegen auf dem Kreis K.
Also liegen alle neun Punkte A', B', C', H_a, H_b, H_c, D, E, F auf einem Kreis.

QED

En 1821, les mathématiciens et militaires français **Charles Brianchon**, 1783-1864 et **Jean-Victor Poncelet**, 1788-1867, directeur de l'X, démontrent que les milieux des côtés et les pieds des hauteurs du triangle sont cocycliques.

En 1822 le géomètre allemand **Karl Wilhelm Feuerbach**, 1800-1834, professeur à Erlangen, redécouvre le résultat et démontre aussi que le cercle est tangent extérieurement aux cercles exinscrits et tangent intérieurement au cercle inscrit du triangle : c'est le théorème de Feuerbach. Ce résultat ajoute quatre points remarquables appelés points de Feuerbach.

Le mathématicien français **Olry Terquem**, 1782-1862, mis en évidence que trois autres points appartiennent à ce cercle : les milieux des segments formés par les sommets du triangle et l'orthocentre. En 1842, Terquem apporta une deuxième preuve au théorème de Feuerbach.

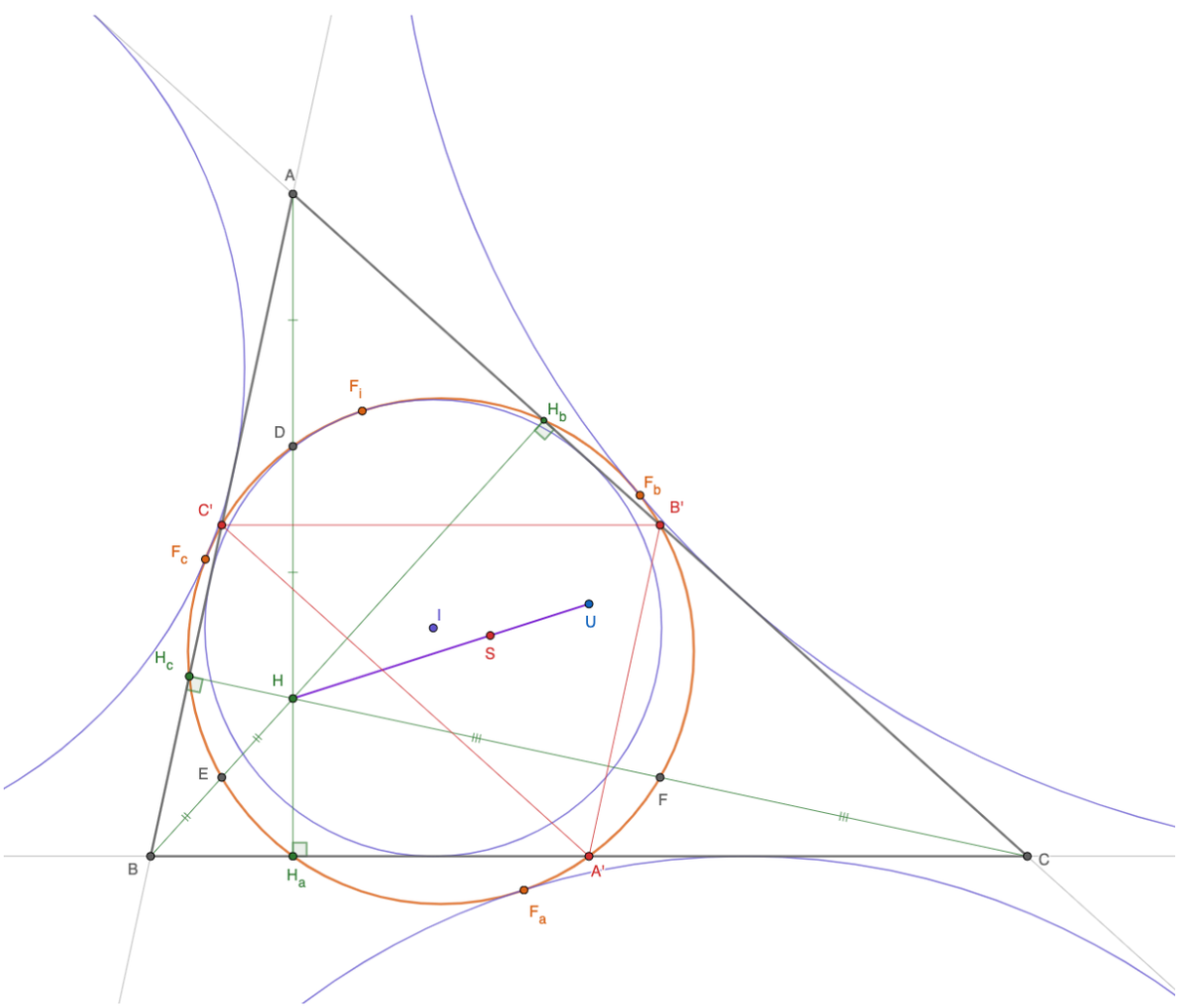
Apparemment l'appellation cercle d'Euler n'est pas justifiée.
Avec le théorème suivant, l'appellation commune en Allemagne de cercle de Feuerbach l'est beaucoup plus :

Satz von Feuerbach

Der Feuerbachkreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise.

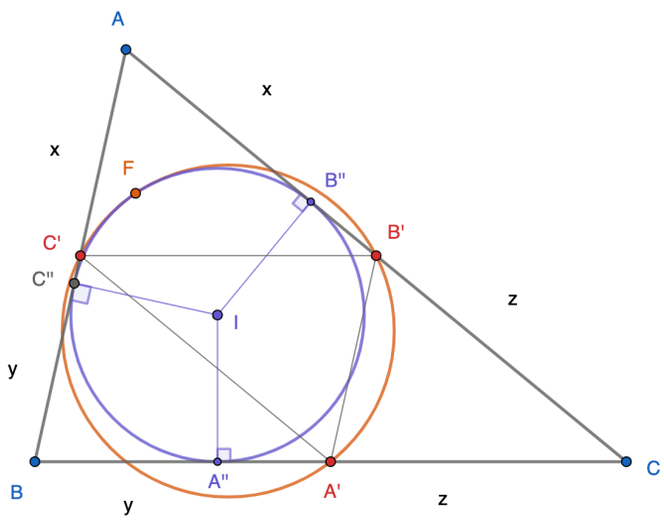
Ce théorème me plait tellement que nous allons en donner trois démonstrations.
Deux sont présentées dans les pages suivantes : avec le théorème de Casey et par inversion.
Une troisième purement synthétique constitue le dernier chapitre du livre.

La figure complète du cercle de Feuerbach avec les 13 points



Démonstration du théorème de Feuerbach #1 - par la réciproque du théorème de Casey (1866)

On note dans un triangle ABC :
A' = m [BC] B' = m[AC] C' = m [AB]
a = BC b = CA c = AB
p = ½ (a+b+c) est le demi-périmètre du triangle.
Le cercle de Feuerbach est défini comme étant le cercle circonscrit à A', B', C' = (A'B'C') = (9)
(I) est le cercle inscrit de centre I.
A'', B'', C'' sont les points de tangence de (I) avec [BC], [AC], [AB]
(J) est le cercle A-exinscrit de centre J.
La notation δ_{XY} représente la distance de la tangente externe entre les cercles (X) et (Y).



Preuve de la tangence avec le cercle inscrit

Soient (A'), (B'), (C') les **cercles de rayon nul** de centre A', B', C'.
On veut appliquer la réciproque du théorème de Casey aux cercles (A'), (B'), (C'), (I).

Par chasse aux tangentes (2 segments tangents à un cercle et issus du même point sont de longueur égale) on a :
AB''= AC''= x BC'' = BA'' = y CA'' = CB'' = z

Des égalités de longueur…
AB = AC'' + C''B = x + y = c CB = CA'' + A''B = z + y = a AC = AB'' + B''C = x + z = b

… on obtient :
x = ½ (c + b - a) = p - a y = ½ (c + a - b)= p - b z = ½ (a + b - c) = p - c

Par le théorème de la droite des milieux :
A'B' = ½ AB A'C' = ½ AC B'C' = ½ BC

Alors
$\delta_{A'B'}$ = A'B' = ½ AB = c/2
$\delta_{B'C'}$ = B'C' = ½ BC = a/2
$\delta_{A'C'}$ = A'C' = ½ AC = b/2
$\delta_{C'I}$ = C'C'' = |C'B - BC''| = |(c/2) − y|= ½ |c − 2y| = ½ |c−2(p − b)| = ½ |c-a-b-c+2b| = ½ |b – a|
$\delta_{A'I}$ = A'A'' = |A'B - BA''| = |(a/2) − y|= ½ |a − 2y| = ½ |a−2(p − b)| = ½ |a-a-b-c+2b| = ½ |b – c|
$\delta_{B'I}$ = B'B'' = |B'A - AB''| = |(b/2) − x|= ½ |b − 2x| = ½ |b−2(p − a)| = ½ |b-a-b-c+2a| = ½ |a – c|

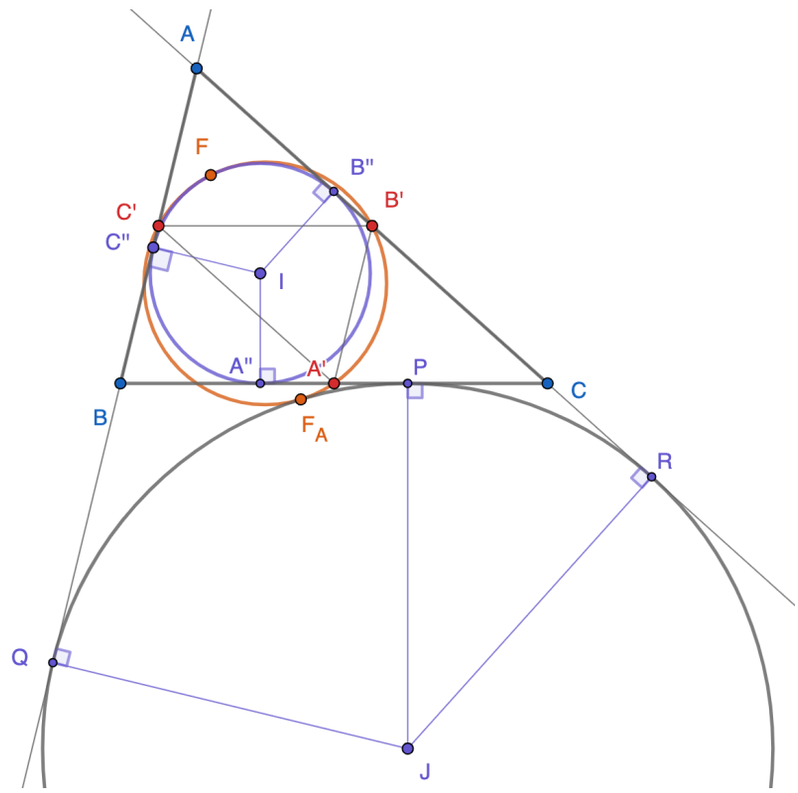
Sans restriction de généralité on peut assumer que a ≤ b ≤ c.
Alors $\delta_{A'B'} \cdot \delta_{C'I} + \delta_{B'C'} \cdot \delta_{A'I}$ = ¼.c.(b − a) + ¼.a.(c − b) = ¼.(bc − ac + ac -ab) = ¼.b(c − a) = $\delta_{A'C'} \cdot \delta_{B'I}$
$\delta_{A'B'} \cdot \delta_{C'I} + \delta_{B'C'} \cdot \delta_{A'I} = \delta_{A'C'} \cdot \delta_{B'I}$

On peut alors appliquer l'inverse du théorème de Casey et affirmer qu'il existe bien un cercle tangent à (A'); (B'); (C') et (I) ; c'est-à-dire que (I) est tangent intérieur à (A'B'C') qui est le cercle de Feuerbach.

QED

Preuve de la tangence avec le cercle A-exinscrit

P, Q, R sont les points de tangence de (J) avec [BC], [AB], [CA].
Soient (P), (Q), (R) les **cercles de rayon nul** de centre P, Q, R.
On veut appliquer la réciproque du théorème de Casey aux cercles (P), (Q), (R), (J).



La chasse aux tangentes donne :
AQ = AR BP = BQ CR = CP

Voici une manipulation intéressante :
2AQ = AQ + AR = AB + BQ + AC + CR = AB + BP + PC + CA = 2p
Donc AQ = p
Alors BQ = AQ - AB = p – c
  CR = AR – AC = p - b

$\delta_{A'B'} = A'B' = ½\ AB = c/2$
$\delta_{B'C'} = B'C' = ½\ BC = a/2$
$\delta_{A'C'} = A'C' = ½\ AC = b/2$
$\delta_{C'J} = C'Q = C'B + BQ = c/2 + p - c = p - c/2 = ½\ (a + b + c - c) = ½\ (a + b)$
$\delta_{B'J} = B'R = B'C + CR = b/2 + p - b = p - b/2 = ½\ (a + b + c - b) = ½\ (a + c)$
$\delta_{A'J} = A'P = A'C - CP = a/2 - (p - b) = ½\ (a - a - b - c + 2b) = ½\ |b - c|$

$\delta_{A'C'} \cdot \delta_{B'J} + \delta_{B'C'} \cdot \delta_{A'J} = ¼.b.(a + c) + ¼.a.(c - b) = ¼.c.(b + a) = \delta_{A'B'} \cdot \delta_{C'J}$
$\mathbf{\delta_{A'C'} \cdot \delta_{B'J} + \delta_{B'C'} \cdot \delta_{A'J} = \delta_{A'B'} \cdot \delta_{C'J}}$

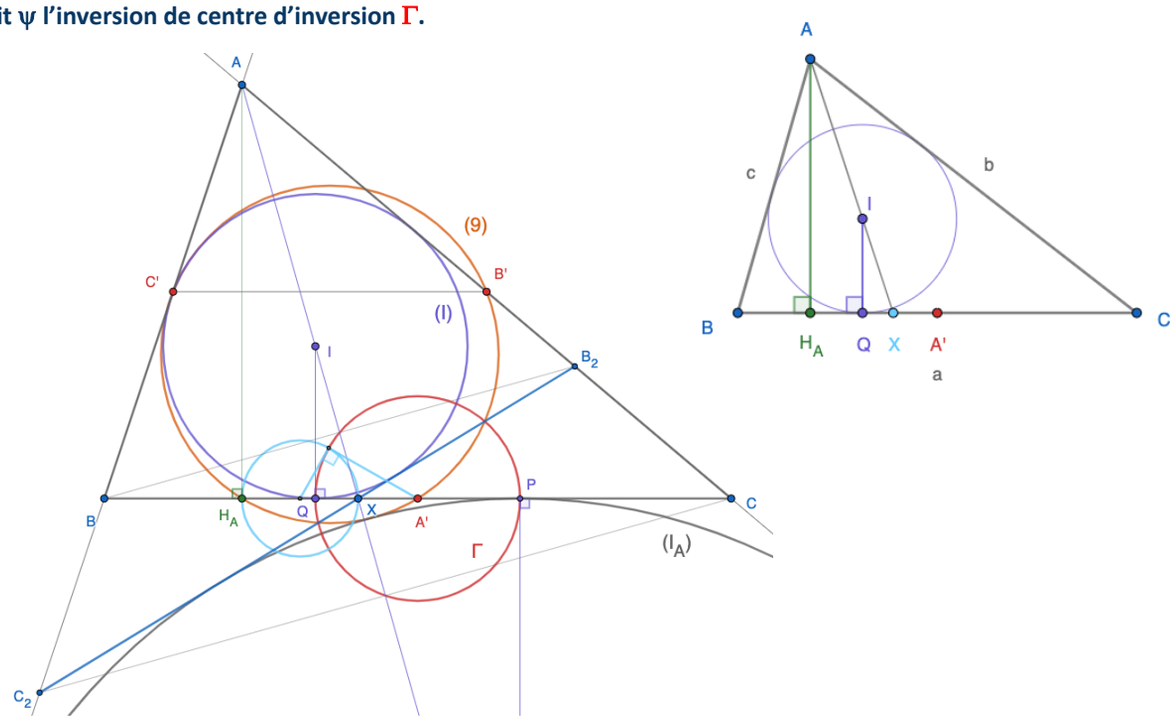
On peut alors appliquer l'inverse du théorème de Casey et affirmer qu'il existe bien un cercle tangent à (A'); (B'); (C') et (J) ; c'est-à-dire que (J) est tangent extérieur à (A'B'C') qui est le cercle de Feuerbach.

QED

Démonstration du théorème de Feuerbach #2 - par inversion

Soit (9) le cercle de Feuerbach de ABC = (A'B'C') (I) le cercle inscrit (I_A) le cercle A-exinscrit
BC est la première tangente interne à (I) et (I_A)
Soit B_2C_2 la seconde tangente interne à (I) et (I_A). B_2, C_2 sont les symétriques de B, C par rapport à AI.
Soit X l'intersection de BC et B_2C_2. Par symétrie X est sur AI.

On a montré dans diverses chasses aux tangentes que A'P = A'A''
Soit Γ le cercle de centre A' et de rayon A'P = A'A''
Soit ψ l'inversion de centre d'inversion Γ.



On va utiliser trois propriétés de l'inversion :
[1] L'image d'un cercle passant par le centre d'inversion est une droite
[2] Un cercle orthogonal au cercle d'inversion est globalement invariant
[3] L'inversion conserve les tangences

Q , P sont les projetés orthogonaux de I, I_A sur BC : (I) ⊥ Γ et (I_A) ⊥ Γ
Par [2] **ψ ((I)) = (I)** **ψ ((I_A)) = (I_A)**

Cherchons ψ((9))
A' ∈ (9) alors d'après [1] ψ((9)) est une droite Ɗ.

(9) = (A'B'C'), donc ψ(B'), ψ(C') ∈ Ɗ Ɗ est antiparallèle à B'C'.
B'C'//BC, donc Ɗ est antiparallèle à BC.

H_A ∈ (9), donc ψ(H_A) ∈ Ɗ
On montre par calcul qu'il y a division harmonique : $A'Q^2 = A'H_A \cdot A'X$ alors **ψ(H_A) = X**
Étapes principales : $BX = ac / (b + c)$ $CX = ab / (b + c)$ $A'H_A = (b^2 - c^2)/2a$ $A'Q = ½ (b - c)$
$A'X = A'B - BX = a/2 - BX = a(b - c) / 2(b + c)$ et on vérifie l'égalité.
Résultat intéressant : Γ et le cercle de diamètre [H_AX] sont orthogonaux.

Ɗ est donc la droite passant par X antiparallèle à BC : c'est B_2C_2, la seconde tangente interne à (I) et (I_A).

ψ((9)) = (B_2C_2)

Comme (B_2C_2) est tangente à (I) et (I_A), en inversant à nouveau, par [3] :
ψ (B_2C_2) = (9) est tangent à ψ((I)) = (I) et à ψ((I_A)) = (I_A) De façon similaire on montre que (9) est tangent à (I_B) et (I_C)

Le cercle de Feuerbach est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits. *QED*

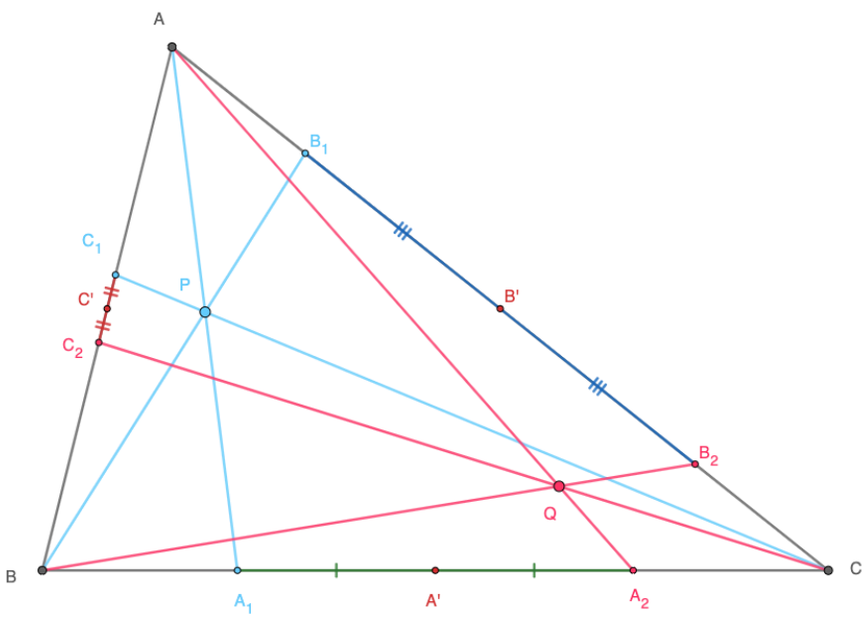
CONJUGUÉS ISOTOMIQUES

Soit un point P et un triangle ABC.

Les droites (AP), (BP), (CP) touchent les côtés BC, AC, AB aux points A_1, B_1, C_1.

On construit A_2 symétrique de A_1 par rapport à A' = milieu de [BC]
B_2 symétrique de B_1 par rapport à B' = milieu de [AC]
C_2 symétrique de C_1 par rapport à C' = milieu de [AB]

Les droites (AA_2), (BB_2) et (CC_2) sont concourantes en un point Q qui est le conjugué isotomique de P par rapport au triangle ABC.



Démonstration de l'existence du conjugué isotomique

Les droites (AA_1), (BB_1) et (CC_1) étant concourantes on a par le théorème de Ceva :
$(AC_1 . BA_1 . CB_1) . (BC_1 . AB_1 . CA_1) = 1$ [1]

Par construction on a $BA_1 = CA_2$ $AB_1 = CB_2$ $AC_1 = BC_2$
$CB_1 = AB_2$ $BC_1 = AC_2$ $CA_1 = BA_2$

On remplace dans [1] : $(BC_2 . CA_2 . AB_2) . (AC_2 . CB_2 . BA_2) = 1$

Par la réciproque du théorème de Ceva : (AA_2), (BB_2) et (CC_2) sont bien concourantes.

QED

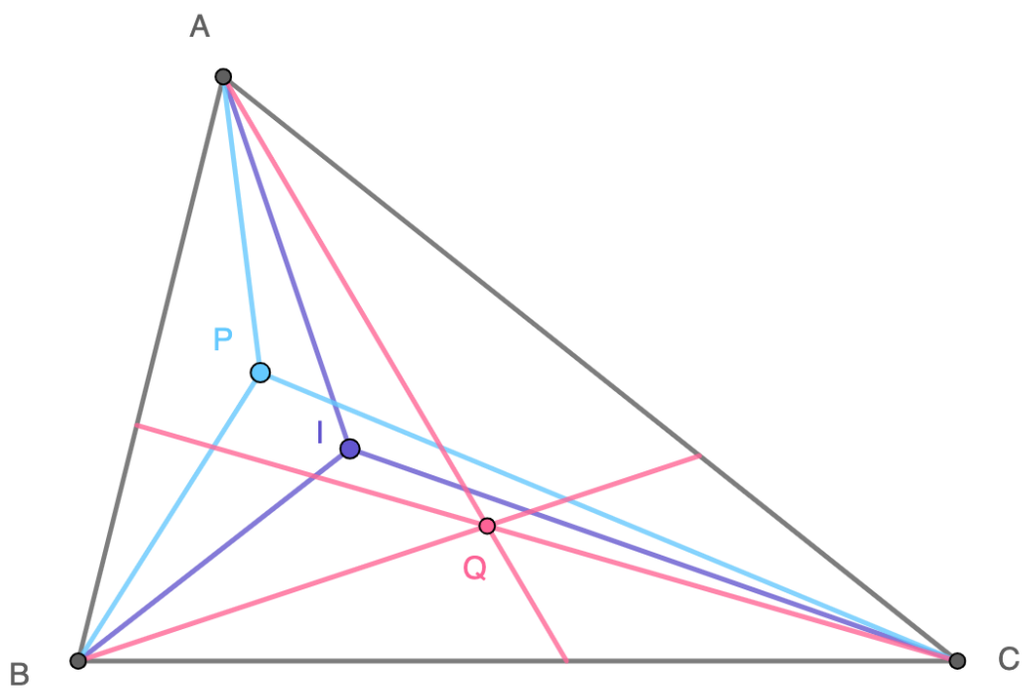
CONJUGUÉS ISOGONAUX - ISOGONALE PUNKTE

Satz vom isogonalen Punkt

Sei ABC ein Dreieck und **P** ein **beliebiger** Punkt (außer der Ecken).
Beim Spiegeln der Geraden AP, BP und CP an den entsprechenden Winkelhalbierenden AI, BI, CI schneiden sich die entstandenen Geraden in einem Punkt Q.

Dieser Punkt heißt ***zu P isogonal konjugiert in Bezug auf das Dreieck ABC***.

Kurz sagt man ***isogonal***.
Wenn Q zu P isogonal ist, ist dann P zu Q isogonal:
die Spiegelbilder der Geraden AQ, BQ, CQ an den Winkelhalbierenden sind wieder die Geraden AP, BP, CP.
Man sagt: P und Q sind ***zueinander isogonal***.



Ist P der Inkreismittelpunkt, dann sind AP, BP und CP die Winkelhalbierenden, und Q ist auch der Inkreismittelpunkt.
Der Inkreismittelpunkt ist zu sich selbst isogonal.

Wir zeigen in den nächsten Seiten:

Ist P der Höhenschnittpunkt, dann sind AP, BP und CP die Höhen, und Q ist der Umkreismittelpunkt.
Der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt sind zueinander isogonal.

Ist P der Schwerpunkt, dann sind AP, BP und CP die Seitenhalbierenden, und Q ist der Lemoine-Punkt.
Der Schwerpunkt und der Lemoine-Punkt sind zueinander isogonal.

Démonstration de l'existence du point isogonal relatif à un triangle

Lemme

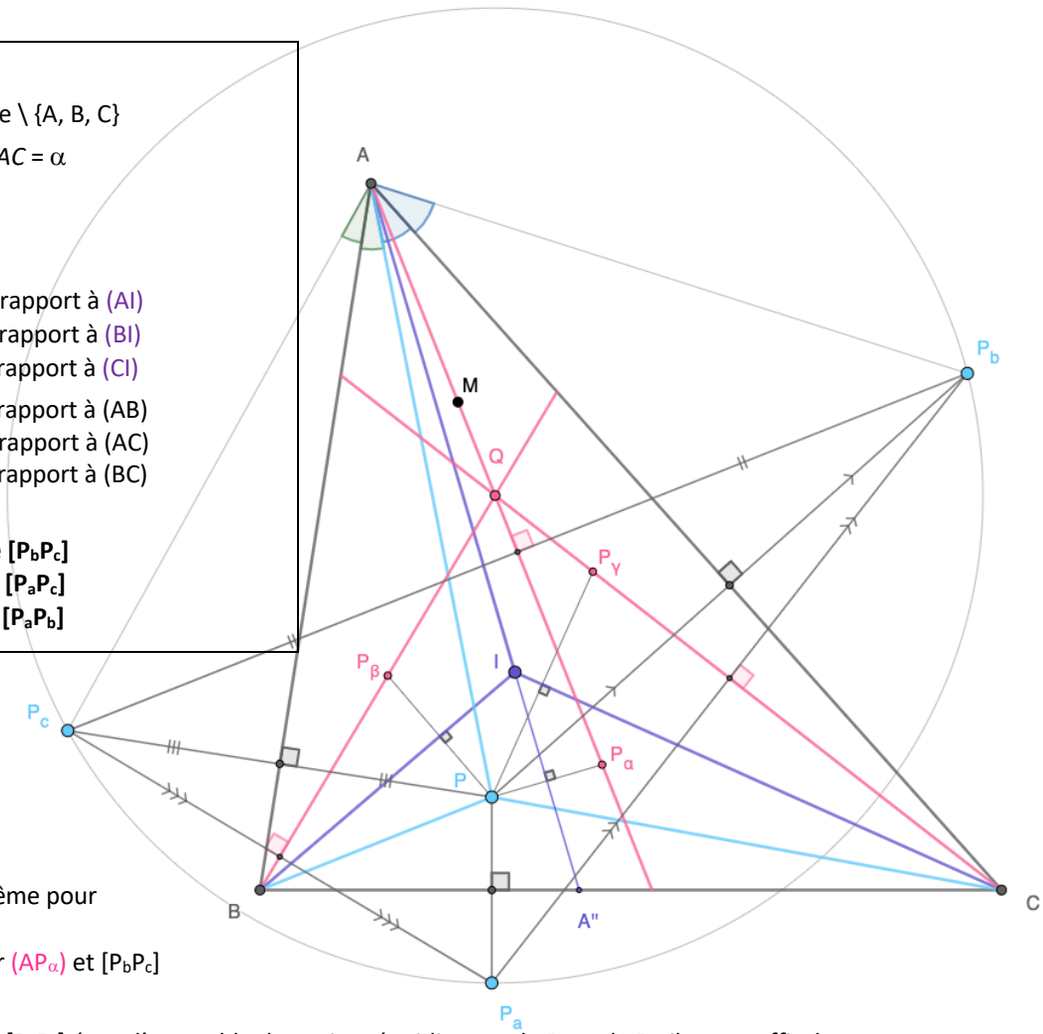
Soit P un point quelconque \ {A, B, C}

(AI) est la bissectrice de *BAC* = α
(BI) est la bissectrice de β
(CI) est la bissectrice de γ

Soient
P_α le symétrique de P par rapport à (AI)
P_β le symétrique de P par rapport à (BI)
P_γ le symétrique de P par rapport à (CI)

P_c le symétrique de P par rapport à (AB)
P_b le symétrique de P par rapport à (AC)
P_a le symétrique de P par rapport à (BC)

alors
(AP_α) est la médiatrice de $[P_bP_c]$
(BP_β) est la médiatrice de $[P_aP_c]$
(CP_γ) est la médiatrice de $[P_aP_b]$



Le raisonnement est le même pour les 3 médiatrices.
Montrons ce résultat pour (AP_α) et $[P_bP_c]$

La médiatrice du segment $[P_bP_c]$ étant l'ensemble des points équidistants de P_b et de P_c, il nous suffit de montrer que pour un point **M** quelconque de (AP_α) on a $MP_b = MP_c$

Par construction on a les 3 relations angulaires : $PAI = IAP_\alpha$ = minus (parce qu'il est tout petit minus sur la figure)
$P_cAB = BAP$ = vert
$PAC = CAP_b$ = bleu

Admettons que P soit dans le secteur entre (AB) et (AI).
Pour le cas contraire un raisonnement analogue s'applique avec des signes différents.

Pour un point **M** quelconque de (AP_α) $P_cAM = P_cAB + BAP + PAI + IAM$ = 2 verts + 2 minus [1]
et $MAP_b = -MAP + PAC + CAP_b$ = -2 minus + 2 bleus
AI étant la bissectrice BAI = IAC et donc vert + 2 minus = bleu
donc MAP_b = - 2 minus + 2 (vert + 2 minus) = 2 verts + 2 minus [2]
[1] et [2] $\boldsymbol{P_cAM = MAP_b}$

Par construction on a aussi les égalités de longueur $AP = AP_c = AP_b$

Alors par le théorème de congruence SWS les triangles P_bAM et P_cAM sont congruents
et donc $\boldsymbol{MP_b = MP_c}$
et (AP_α) est bien la médiatrice de $[P_bP_c]$ *QED* (du lemme)

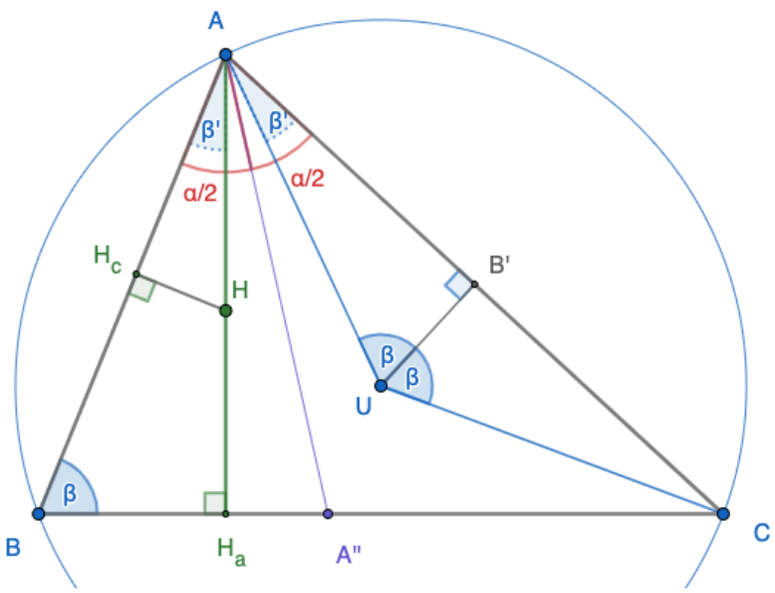
Alors (AP_α), (BP_β) et (CP_γ) sont les médiatrices du triangle $P_aP_bP_c$.
Les médiatrices de tout triangle étant cosécantes, l'existence de Q est ainsi démontrée.

Q est le centre du cercle circonscrit de $P_aP_bP_c$.

H et U SONT CONJUGUÉS ISOGONAUX

Dans un triangle quelconque, les images des hauteurs par rapport aux bissectrices correspondantes se coupent au centre du cercle circonscrit : **H et U sont conjugués isogonaux**.

In einem beliebigen Dreieck, die Spiegelbilder der Höhen an den entsprechenden Winkelhalbierenden schneiden sich im Umkreismittelpunkt: **H und U sind zueinander isogonal.**



Démonstration

Somme des angles dans le triangle rectangle BAHa	BAHa = BAH = β' = 90 - β
Angle au centre dans le cercle circonscrit	*CUA* = 2.*CBA* = 2β
CAO est isocèle donc	B'UA = β
Somme des angles dans le triangle rectangle B'UA	UAB' = 90 - β
Donc BAH = UAC = 90- β	
Comme AA'' est la bissectrice de BAC = α	HAA'' = α/2 - (90 - β) = A''AU

C'est à dire que (AH) et (AU) sont symétriques par rapport à la bissectrice (AA'')

On montre de même que (BH) et (BU) sont symétriques par rapport à la bissectrice (BB'')

et que (CH) et (CU) sont symétriques par rapport à la bissectrice (CC'')

QED

LE POINT DE LEMOINE – conjugué isogonal du centre de gravité

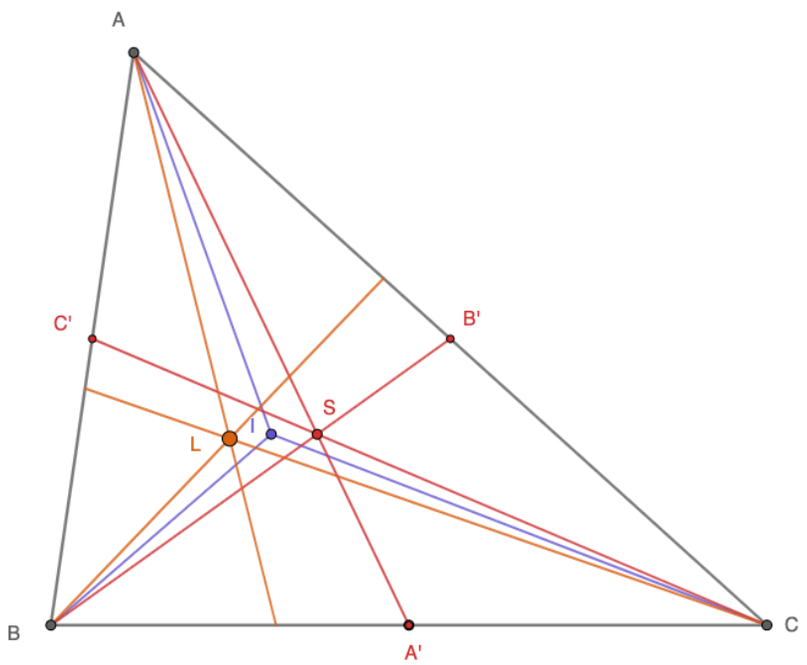
Émile Lemoine - mathématicien et ingénieur Français, 1840-1912

Wir spiegeln die Seitenhalbierenden eines Dreiecks über die entsprechenden Winkelhalbierenden.

Die entstandenen Geraden heißen ***Symedianen.***

Sie schneiden sich in einem Punkt: der ***Lemoine-Punkt*** gewöhnlich mit **L** bezeichnet.
oder ***Symedianenpunkt*** des Dreiecks

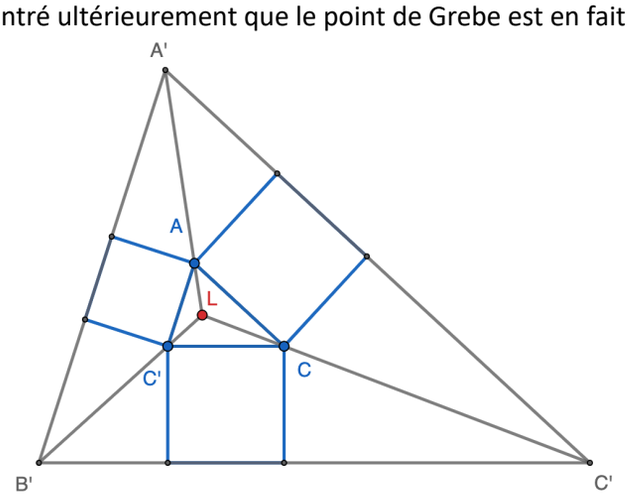
S, I, L sind **NICHT** kollinear.



Beweis

Es handelt sich um einen Sonderfall des Satzes vom isogonalen Punkt mit P = S und Q = L:
S existiert also existiert L.

Le mathématicien allemand Ernst Wilhelm **Grebe** (1804 – 1874) a proposé la construction suivante.
On accole des carrés à ABC et on trace A'B'C' comme intersection de la prolongation des cotés extérieurs des carrés.
Alors les droites AA', BB', CC' sont concourantes en un point appelé **point de Grebe**.
On a montré ultérieurement que le point de Grebe est en fait le point de Lemoine de ABC.



LE POINT DE GERGONNE ET LE POINT DE NAGEL

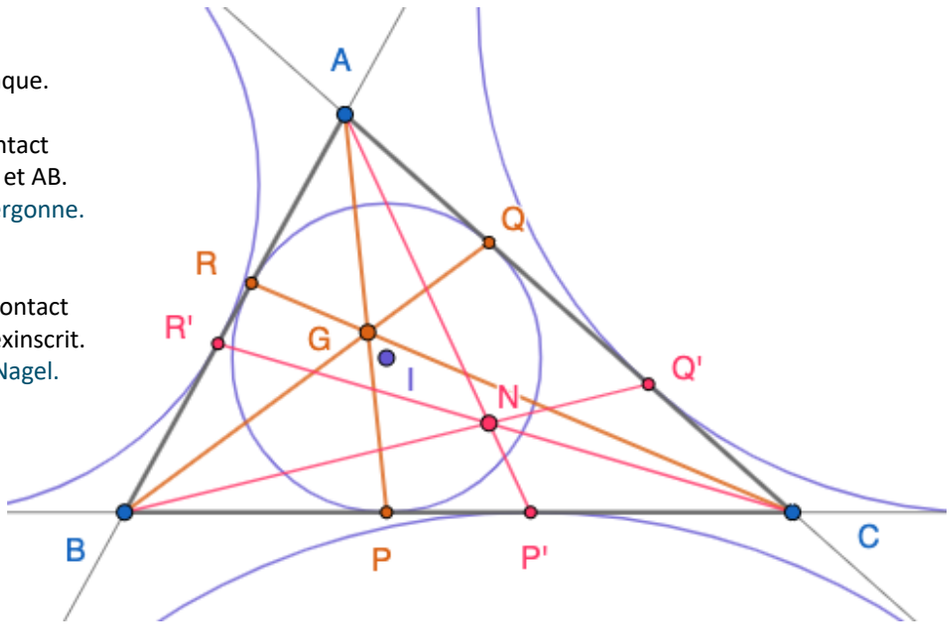
Joseph Gergonne - militaire et mathématicien Français, 1771-1859

Christian Heinrich von Nagel - mathématicien Allemand, 1803-1882

Soit ABC un triangle quelconque.

P, Q, R sont les points de contact du cercle inscrit avec BC, AC et AB.
PQR s'appelle triangle de Gergonne.

P', Q', R' sont les points de contact avec les cercles A-, B-, et C-exinscrit.
P'Q'R' s'appelle triangle de Nagel.



Les droites AP, BQ et CR sont concourantes en un point G : le point de Gergonne du triangle.

Démonstration

On introduit les mesures x, y, z obtenues par chasse aux tangentes :
AQ = AR = x BR = BP = y CP = CQ = z

On a alors (BP.CQ.AR) / (PC.QA.RB) = yzx / zxy = 1

Le réciproque du théorème de Ceva nous permet de conclure que les droites AP, BQ et CR sont concourantes et donc d'affirmer l'existence du point de Gergonne.

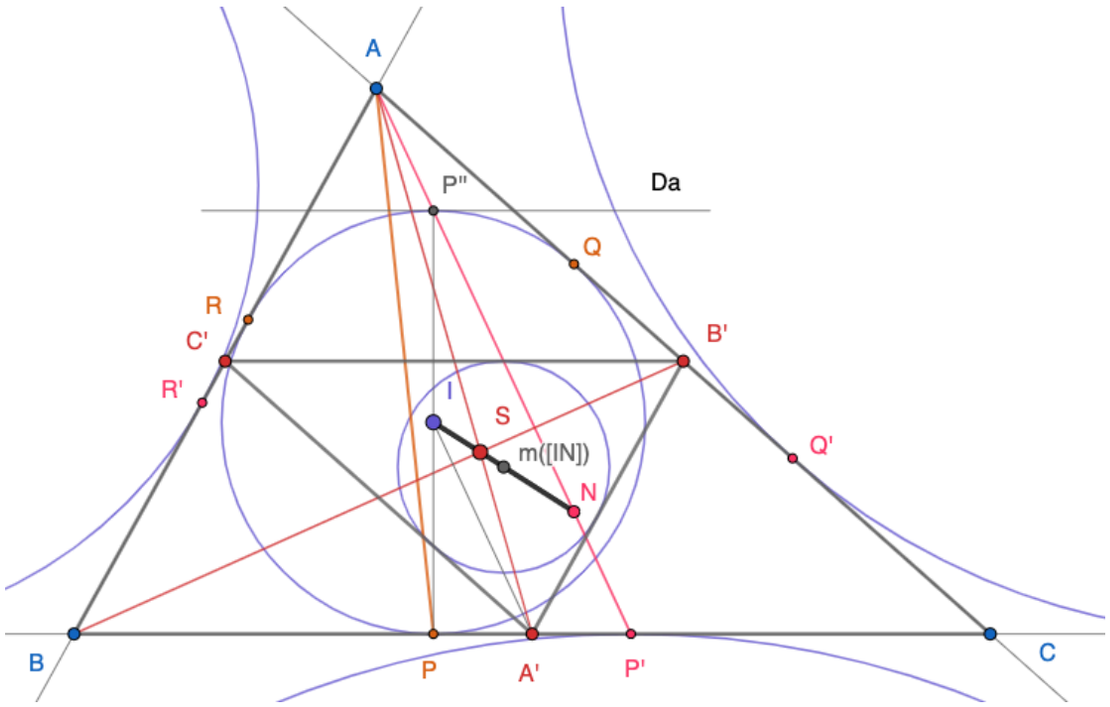
Les droites AP', BQ' et CR' sont concourantes en un point N : le point de Nagel du triangle.

Démonstration

On a montré dans l'exercice d'application de la chasse aux tangentes (p15) que
CP' = BP CQ' = AQ AR = BR'

On a alors (BP'.CQ'.AR') / (P'C.Q'A.R'B) = yzx / zxy = 1

Le réciproque du théorème de Ceva nous permet de conclure que les droites AP', BQ' et CR' sont concourantes et donc d'affirmer l'existence du point de Nagel.



I, S, N sont alignés dans cet ordre et SN = 2.SI

Démonstration

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport -2.
Avec la notation habituelle les milieux des côtés sont A', B', C' et h(A') = A h(B') = B h(C') = C

Soit D_a la droite parallèle à (BC) et tangente au cercle inscrit en P''.
L'homothétie h_a de centre A envoyant D_a sur (BC), envoie le cercle inscrit sur le cercle A-exinscrit, et $h_a(P'') = P'$
Donc A, P' et P'' sont alignés.

P et P'' sont sur un diamètre du cercle inscrit de centre I donc PP'' = 2 PI
Comme on a vu au paragraphe précédent, BP = CP' donc A'=m(PP') et PP' = 2 PA'

PP'' = 2 PI et PP' = 2 PA' : la réciproque de Thalès dans PP'P'' nous permet de conclure que IA // P'P''

h(IA') est une droite parallèle à (IA') passant par h(A') = A : c'est (AP').
L'image par h de l'intersection des droites IA' IB' et IC' (c'est-à-dire h(I)) est donc l'intersection des droites AP'.
BQ' et CR' (c'est-à-dire N).
Alors h(I) = N et donc I, S, N sont alignés dans cet ordre et SN = 2 SI.

Le centre du cercle inscrit dans A'B'C' est le milieu de [IN]

Démonstration

L'homothétie de centre S et de rapport - ½ envoie I sur le milieu de [IN] et elle envoie ABC sur A'B'C'.
Donc elle envoie le cercle inscrit de l'un sur celui de l'autre.
Le centre du cercle inscrit dans A'B'C' est donc le milieu de [IN].

I est le point de Nagel de A'B'C'

Soit h' l'homothétie de centre S et de rapport -1/2. h'(ABC) = A'B'C' h' (N) = I
L'image du point de Nagel de ABC par h' est le point de Nagel de l'image de ABC par h'.

LE TRIANGLE ANTIMEDIAL - DAS ANTIMEDIALDREIECK

Sei X der Schnittpunkt der Parallele zu CA durch B und der Parallele zu AB durch C.
Sei Y der Schnittpunkt der Parallele zu AB durch C und der Parallele zu BC durch A.
Sei Z der Schnittpunkt der Parallele zu BC durch A und der Parallele zu CA durch B.

Das so entstandene Dreieck XYZ heißt **Antimedialdreieck** des Dreiecks ABC.

So entstehen drei Parallelogrammen: ABXC, BCYA und CAZB.

Es folgt AB = CX = CY C = m[XY]
ZA = BC = AY A = m[YZ]
BX = AC = BZ B = m[ZX]

Die Ecken des Dreiecks ABC sind also die Mittelpunkte der Seiten seines Antimedialdreiecks.

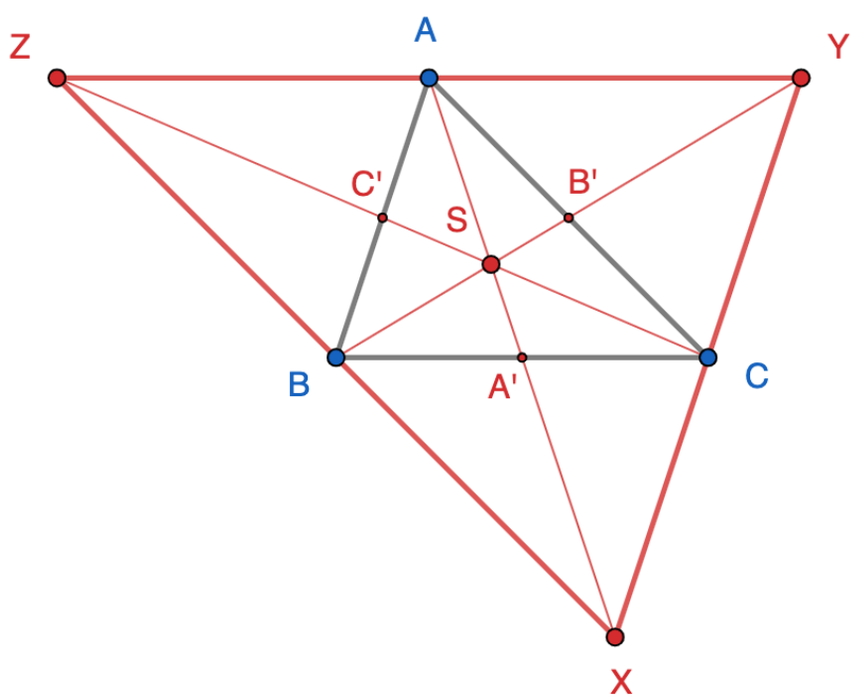
Die Diagonalen BY und CA des Parallelogramms BCYA halbieren sich gegenseitig und schneiden sich in B'
Die Diagonalen AX und BC des Parallelogramms BXCA halbieren sich gegenseitig und schneiden sich in A'
Die Diagonalen CZ und AB des Parallelogramms BCAZ halbieren sich gegenseitig und schneiden sich in C'

XS = XA' + A'A = 1/2 AA' + 1/6 AA' = 2/3 AA'
YS = XB' + B'B = 1/2 BB' + 1/6 BB' = 2/3 BB'
ZS = XC' + C'C = 1/2 CC' + 1/6 CC' = 2/3 CC'

ABC und sein Antimedialdreieck haben also den gleichen Schwerpunkt.

&

L'orthocentre de ABC est le centre du cercle circonscrit de XYZ.



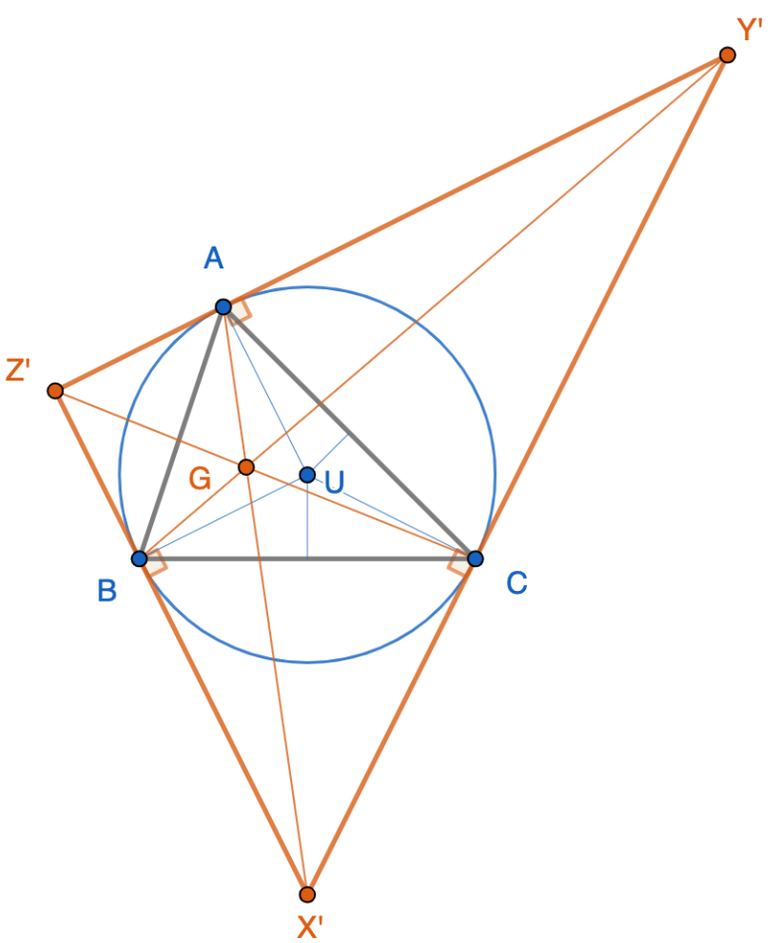
LE TRIANGLE TANGENT - DAS TANGENTENDREIECK

Wir betrachten den Umkreis eines spitzwinkligen Dreiecks ABC und die Tangenten an diesen Umkreis in den Ecken A, B, C.
Die Tangenten in B und in C schneiden sich in X'
Die Tangenten in C und in A schneiden sich in Y'
Die Tangenten in A und in B schneiden sich in Z'

Das so entstandene Dreieck X'Y'Z' heißt **Tangentendreieck** des Dreiecks ABC.

Der Umkreis des Dreiecks ABC ist der Inkreis des Tangentendreiecks X'Y'Z'.

Ist X'Y'Z' das Tangentendreieck eines spitzwinkligen Dreiecks ABC,
dann schneiden sich die Geraden AX', BY' und CZ' im Gergonne-Punkt des Dreiecks X'Y'Z'



DAS ANTIMEDIAL DREIECK IST ISOGONAL ZUM TANGENTENDREIECK

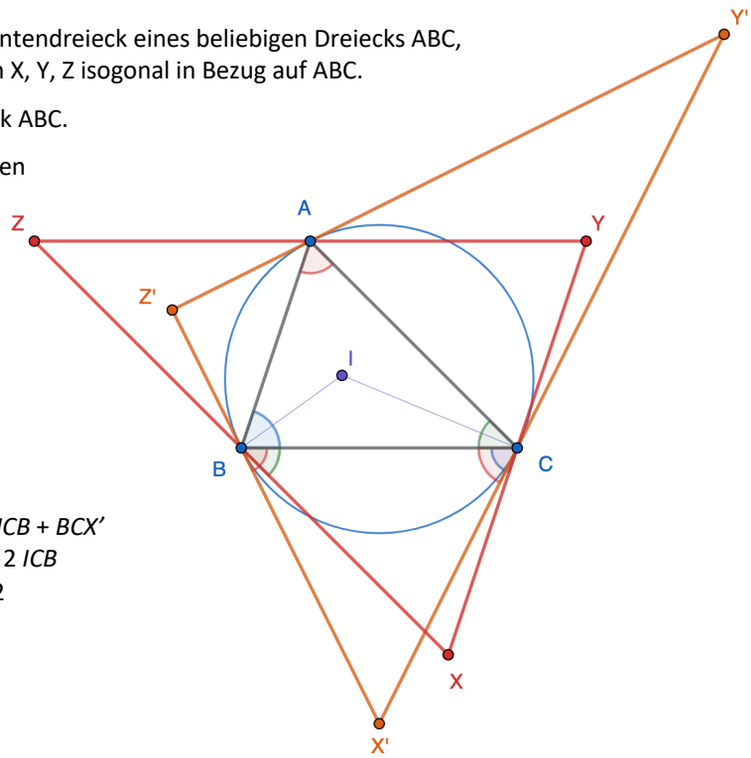
Anders gesagt:
Sind XYZ das Antimedialdreieck und X'Y'Z' das Tangentendreieck eines beliebigen Dreiecks ABC, dann sind die Punkte X', Y', Z' jeweils zu den Punkten X, Y, Z isogonal in Bezug auf ABC.

Wir betrachten X und X' für ein spitzwinkliges Dreieck ABC.

Die von B und von C ausgehenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC schneiden sich in I:
$CBI = \beta/2$ $\quad BCI = \gamma/2$

Wechselwinkel : BX // AC also
$XBC = ACB = \gamma$ $\quad BCX = CBA = \beta$

Als Sehnentangentenwinkel:
$X'BC = CAB = \alpha$ $\quad BCX' = CAB = \alpha$



Damit haben wir

$XBI + X'BI$
$= XBC + CBI + X'BC + CBI$
$= XBC + X'BI + 2\ CBI$
$= \gamma + \alpha + 2\ \beta/2$
$= \gamma + \alpha + \beta$
$= 180$

$ICX + ICX'$
$= ICB + BCX + ICB + BCX'$
$= BCX + BCX' + 2\ ICB$
$= \beta + \alpha + 2\ \gamma/2$
$= \beta + \alpha + \gamma$
$= 180$

Also:
(BX') ist das Spiegelbild von (BX) an (BI) und
(CX') ist das Spiegelbild von (CX) an (CI).

Analog erhält man:
(AX') ist das Spiegelbild von (AX) an (AI).

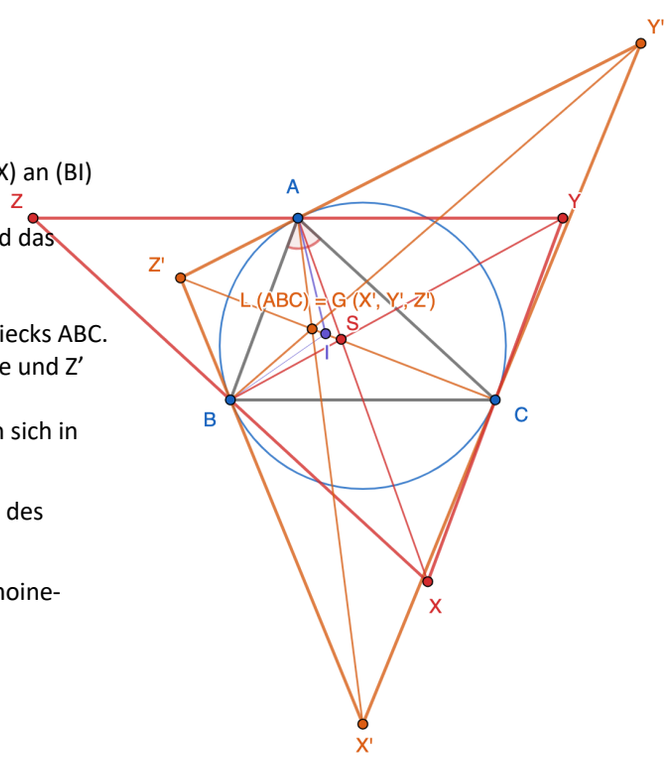
Nach dem Satz vom isogonalen Punkt schneiden sich die Spiegelbilder der Geraden AX, BX, CX an den entsprechenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC in dem zu X isogonalen Punkt in Bezug auf ABC.

Daraus folgt: X' ist isogonal zu X
Analog zeigt man: Y' ist isogonal zu Y, Z' ist isogonal zu Z

QED

DER LEMOINE-PUNKT EINES DREIEKS IST DER GERGONNE-PUNKT DES TANGENTENDREIECKS

Wir haben gerade gezeigt, dass X' auf dem Spiegelbild von (AX) an (BI) liegt.
(AX) ist die von A ausgehende Seitenhalbierende von ABC, und das Spiegelbild einer Seitenhalbierenden an der entsprechenden Winkelhalbierenden heißt Symmediane.
Also liegt X' auf der von A ausgehenden Symmediane des Dreiecks ABC.
Entsprechend liegt Y' auf der von B ausgehenden Symmediane und Z' auf der von C ausgehenden Symmediane.
(AX'), (BY'), (CZ') sind also ABCs Symmedianen, und schneiden sich in ABCs Lemoine-Punkt.



(AX'), (BY'), (CZ') schneiden sich auch in dem Gergonne-Punkt des Dreiecks X'Y'Z'.

Folglich stimmt X'Y'Z's Gergonne-Punkt überein mit ABCs Lemoine-Punkt.

THÉORÈME DE TERQUEM – POINTS DE TERQUEM – CONJUGUÉS CYCLOCÉVIENS

Pour rappel, une cévienne est une droite d'un triangle issue d'un sommet et sécante avec le côté opposé.
Les hauteurs, les médianes et les bissectrices d'un triangle sont des céviennes particulières

Triangle et cercle pédal

Soit ABC un triangle et un point P distinct des sommets.
Les céviennes (AP), (BP) et (CP) coupent les côtés opposés du triangle en trois points D, E, F.

Le triangle DEF est le **triangle pédal** du point P par rapport au triangle ABC.

Son cercle circonscrit est appelé **cercle pédal** de P par rapport au triangle ABC.

Le triangle pédal correspondant aux hauteurs est le triangle orthique.
Le triangle pédal correspondant aux médianes est le triangle médian.

Le cercle d'Euler est le cercle pédal de l'orthocentre et du centre de gravité.

Théorème de Terquem

Soit ABC un triangle, et trois céviennes concourantes en un point P.
Le cercle pédal de P passant par les pieds D, E, F de ces céviennes détermine trois autres points K, L, M sur les côtés du triangle ABC.
Ces trois autres points sont également les pieds de céviennes concourantes en un point Q.

Q est appelé **conjugué cyclocévien** de P.

Les six points d'intersection du triangle et du cercle pédal sont appelés **points de Terquem**.

Démonstration

Les céviennes concourantes en P se traduit par Ceva en:
(AF.BD.CE)/(BF.CD.AE) = 1

Par le théorème de la puissance du point :
La puissance de A est invariante sur les sécantes AB et AC :
AF.AM = AE·AL

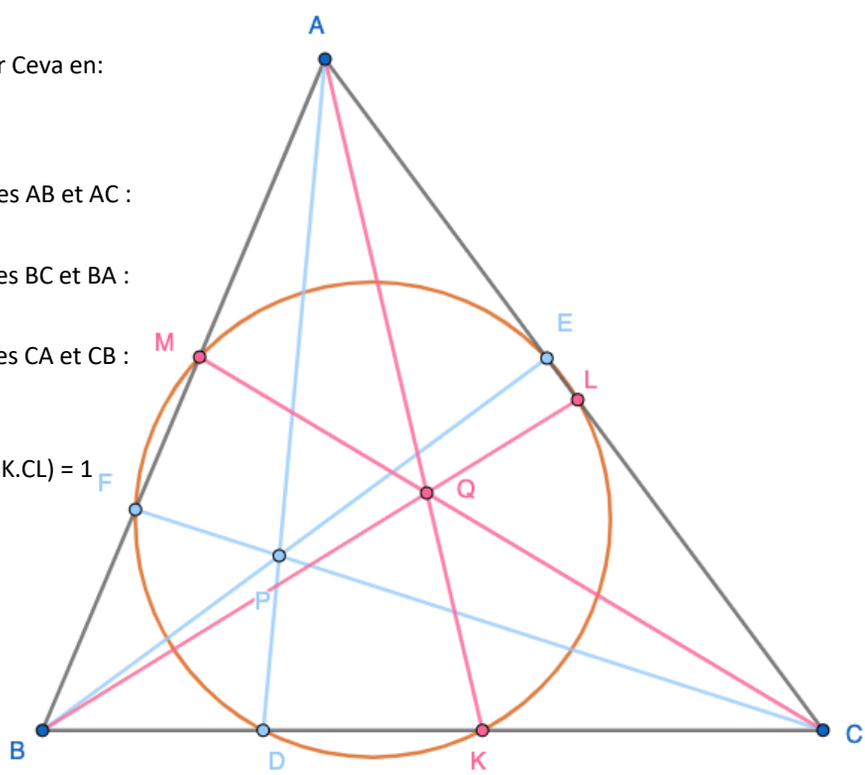
La puissance de B est invariante sur les sécantes BC et BA :
BD.BK = BF.BM

La puissance de C est invariante sur les sécantes CA et CB :
CE.CL = CD.CK

Alors
(AF. BD. CE) / (AE.BF.CD) = (AL.BM.CK) / (AM.BK.CL) = 1

Ce qui implique par la réciproque de Ceva que
AK, BL et CM sont concourantes.

QED



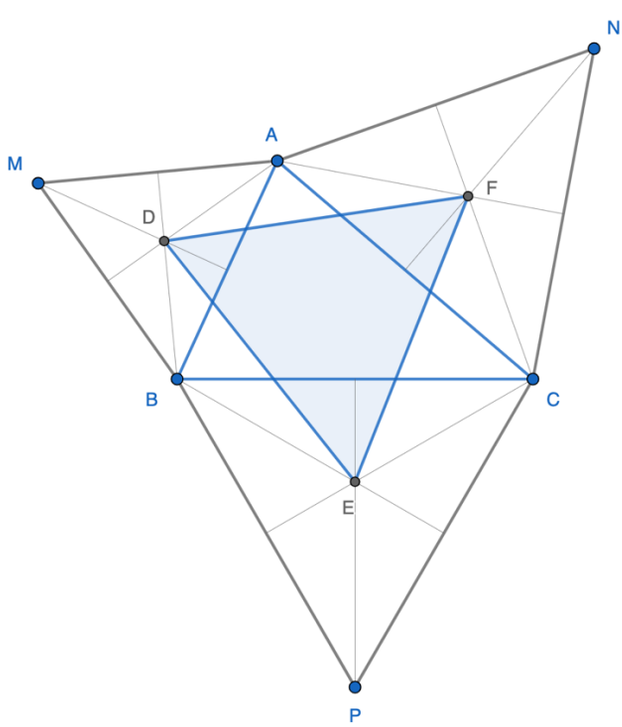
Cas particuliers

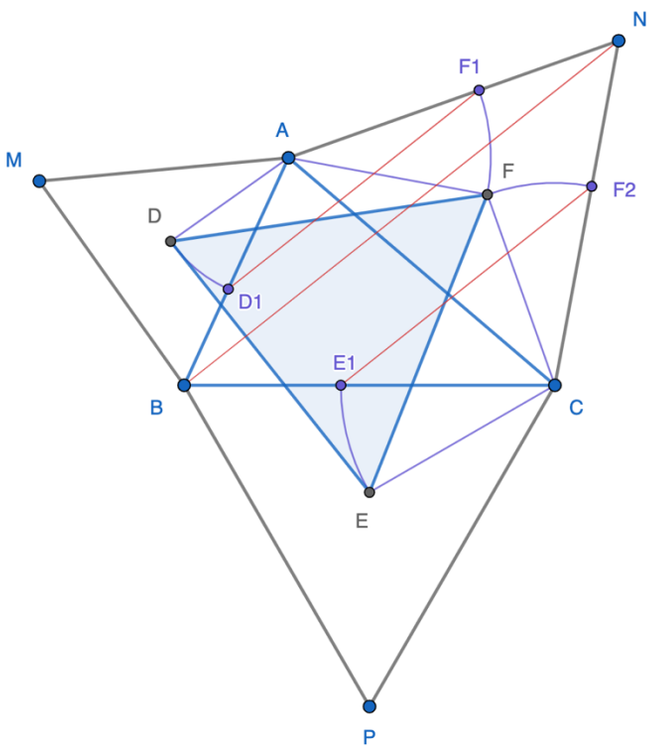
Le point de Gergonne du triangle est son propre conjugué cyclocévien.
Le cercle pédal est alors le cercle inscrit.

Le conjugué cyclocévien du centre de gravité est l'orthocentre, et réciproquement.
Le cercle pédal est alors le cercle d'Euler.

LE TRIANGLE DE NAPOLÉON

Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC donné, on construit 3 triangles équilatéraux.
Les centres de ces triangles forment un triangle équilatéral (triangle de Napoléon)





Démonstration

Le centre D du triangle équilatéral ABM, de côté AB = c est situé sur la médiatrice de [MB].
Les médiatrices se coupent aux 2/3 de leur pied. On a AB = AM = AD $\sqrt{3}$ et *DAB* = 30°
On oriente le plan dans le sens trigonométrique
Soit R_A la rotation de centre A d'angle +30°
Soit D_1 l'image de D dans la rotation R_A. D_1 est l'intersection de *C*(A,AD) avec [AB]

De même, le centre F du triangle équilatéral ANC, de côté AC = b est situé sur la médiatrice de [AN].
AC = AN = AF $\sqrt{3}$ et *FAN* = 30°
Soit F_1 l'image de F dans la rotation R_A.
DF = D_1F_1 et AB/AD = AB/AD_1 = AN/AF = AN/AF_1 Donc **(D_1F_1) // (BN) et BN = $D_1F_1\sqrt{3}$**

Considérant maintenant la rotation R_C de centre C d'angle -30° $R_C(E) = E_1$ $R_C(F) = F_2$
EF = E_1F_2 et CB/CE = CB/CE_1 = CN/CF = CN/CF_2 Donc **(E_1F_2) // (BN) et BN = $E_1F_2\sqrt{3}$**

Donc BN = $D_1F_1\sqrt{3}$ = $E_1F_2\sqrt{3}$ donc $D_1F_1 = E_1F_2$ donc **DF = EF : DEF est isocèle de sommet principal F**.

$\wedge(FD,FE) = \wedge(FD,F_1D_1) + \wedge(F_1D_1, F_2E_1) + \wedge(F_2E_1, FE) = 30° + 0° - \wedge(FE,F_2E_1) = 30° - (-30°) = 60°$

Le triangle DEF, isocèle de sommet principal F, d'angle au sommet 60°, est équilatéral.

LES POINTS DE FERMAT - TORRICELLI

PREMIER POINT DE FERMAT F_1 ou F

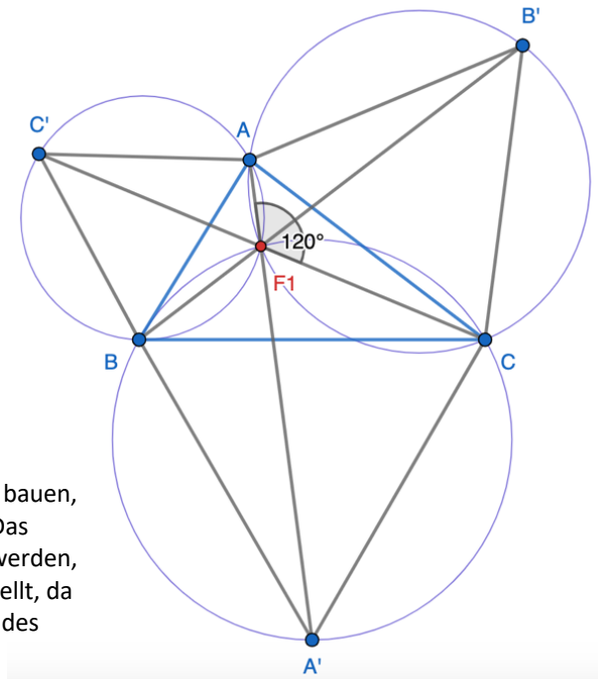
Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC donné, on construit les 3 triangles équilatéraux ABC', BCA', ACB'

F1 s'obtient de 2 façons :

1) F_1 est l'intersection de AA', BB', CC'.

2) Les cercles circonscrits aux triangles ABC', BCA', ACB' se coupent en F_1

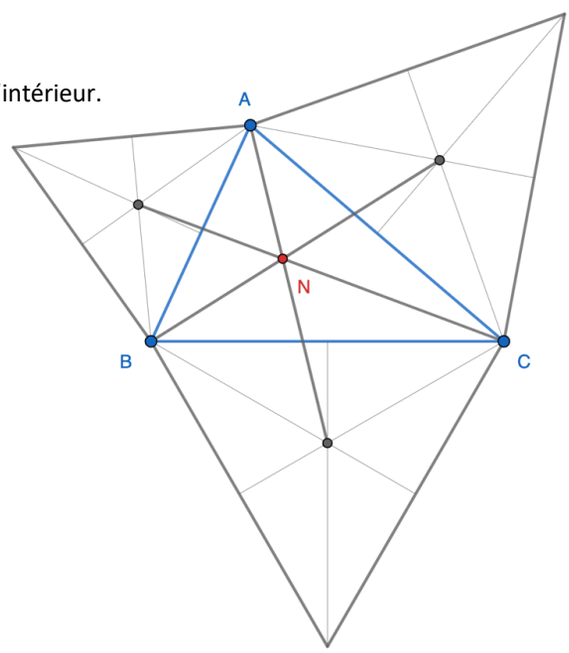
F_1 est tel que $CF_1B = BF_1A = AF_1C = 120°$



Der erste Fermat-Punkt F_1 findet in der Wirtschaftsmathematik, speziell in der Standortplanung Anwendung.
Angenommen drei Unternehmen wollen ein Zentrallager derart bauen, dass die Transportkosten zu diesem Zentrallager minimal sind. Das Zentrallager müsste an der Stelle des Fermat-Punkts F_1 gebaut werden, wenn man sich die Lage der drei Unternehmen als Dreieck vorstellt, da für den Fermat-Punkt F_1 die Summe der Abstände zu den Ecken des Dreiecks minimal ist.

SECOND POINT DE FERMAT F_2

S'il y a F_1, c'est en effet qu'il y a F_2
F_2 est obtenu en construisant les 3 triangles équilatéraux vers l'intérieur.



LES POINTS DE NAPOLÉON

PREMIER POINT DE NAPOLEON N_1 ou N

Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC donné, on construit 3 triangles équilatéraux.

On relie les centres de gravité de ces triangles aux sommets opposés du triangle ABC.
Ces segments sont concourants en un point : le premier point de Napoléon N_1

SECOND POINT DE NAPOLEON N_2

Le second point de Napoléon est obtenu en construisant les 3 triangles équilatéraux vers l'intérieur.

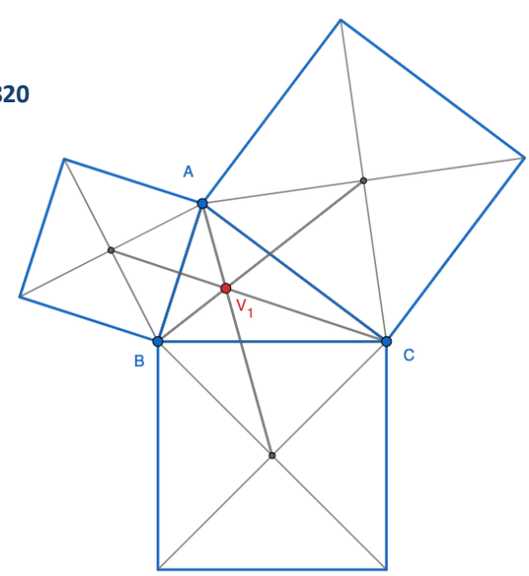
LES POINTS DE VECTEN

Vecten – mathématicien français contemporain de Gergonne ~ 1820

PREMIER POINT DE VECTEN V_1

Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC donné, on construit 3 carrés.

On relie les centres de ces carrés aux sommets opposés du triangle ABC.
Ces segments sont concourants en un point : le premier point de Vecten V_1.



SECOND POINT DE VECTEN V_2

Vous l'aurez deviné, quand on dessine les carrés vers l'intérieur du triangle on obtient le V_2.

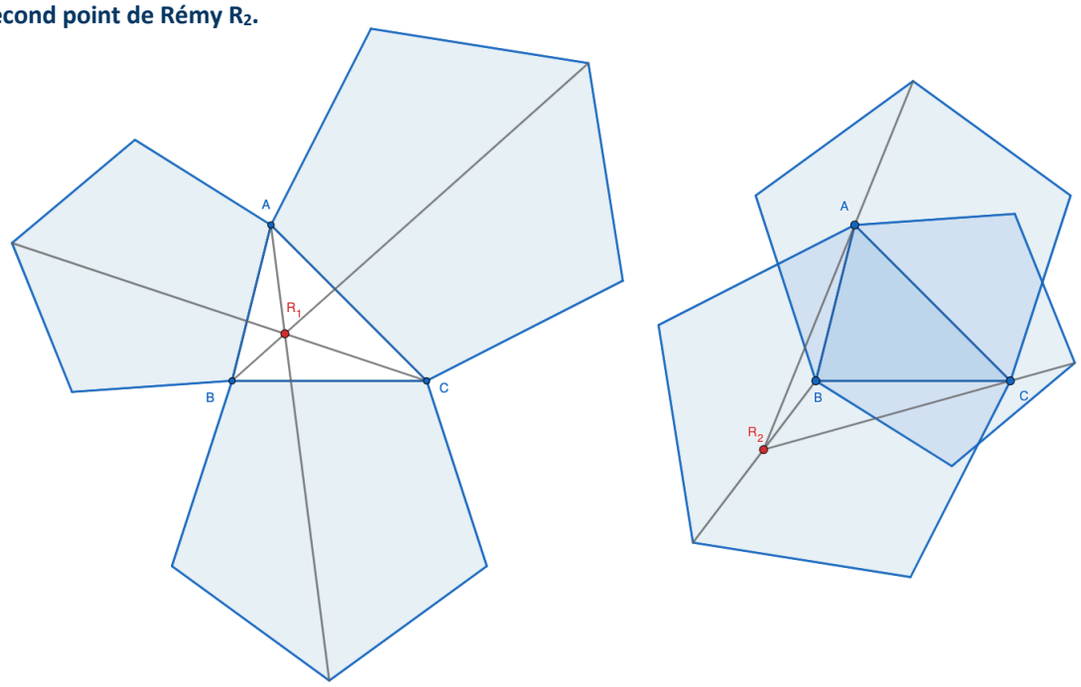
LES POINTS DE RÉMY

Rémy - c'est moi, 1971+

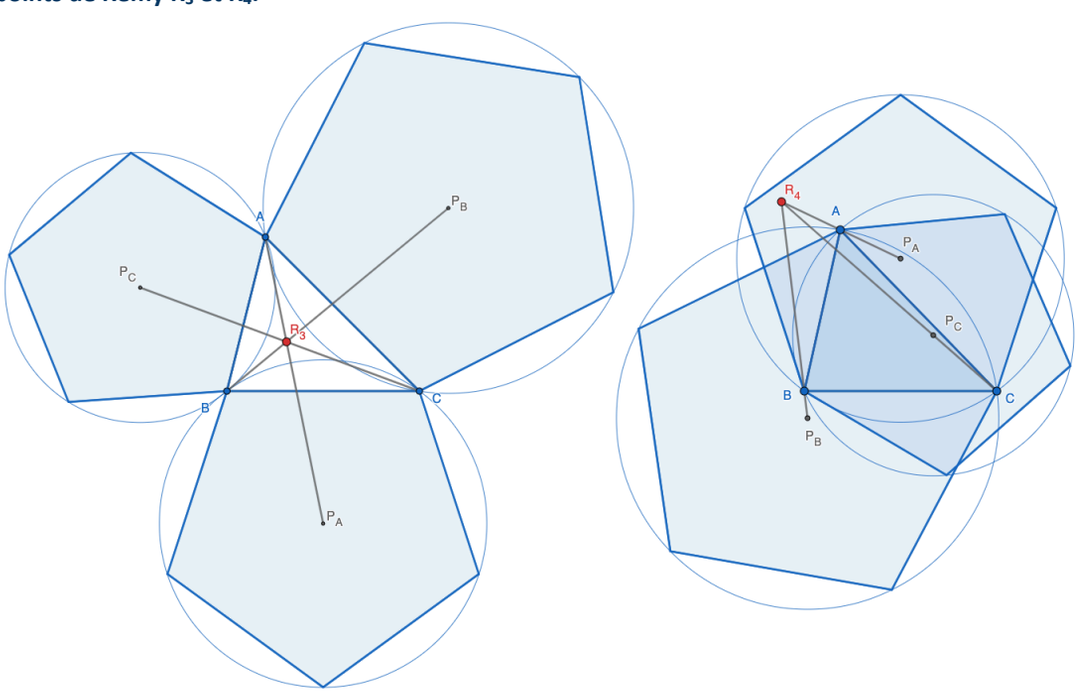
Si Fermat accole des triangles équilatéraux, et Vecten des carrés… et bien moi je vais tenter le truc de fou : j'y accole des pentagones réguliers! Je teste, et ça marche !!! Vite, un théorème :

Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC donné, on construit extérieurement à ABC trois pentagones réguliers. On relie les sommets du triangle ABC aux sommets opposés des pentagones correspondants.
Ces segments sont concourants en un point : (ça y est je vais passer à la postérité, voici) le **premier point de Rémy R_1**

Quand on dessine les pentagones réguliers vers l'intérieur du triangle ABC ça marche encore : on obtient le **second point de Rémy R_2.**



Attendez, attendez, je peux faire encore mieux. Napoléon a pris les centres des triangles de Fermat : je prends les centres des pentagones, vers l'extérieur et vers l'intérieur. Et paf, ça marche encore : voici les **points de Rémy R_3 et R_4.**



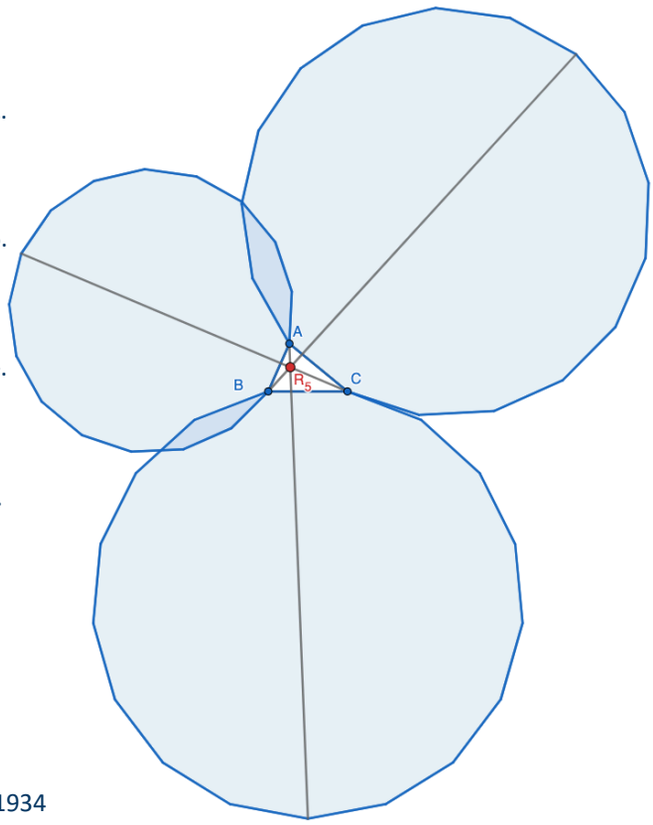
Personne n'a dû penser à accoler des heptadécagones réguliers…
Et puis à l'époque construire un heptadécagone c'était la galère, alors ils n'allaient pas s'amuser à en dessiner 3.
La classe, ça marche encore !

Les segments reliant les sommets du triangle ABC aux sommets correspondants des heptadécagones accolés extérieurement à ABC sont cosécants en R_5.

Les segments reliant les sommets du triangle ABC aux sommets correspondants des heptadécagones accolés intérieurement à ABC sont cosécants en R6.

Les segments reliant les sommets du triangle ABC aux centres correspondants des heptadécagones accolés extérieurement à ABC sont cosécants en R_7.

Les segments reliant les sommets du triangle ABC aux centres correspondants des heptadécagones accolés intérieurement à ABC sont cosécants en R_8.



LES TRIANGLES DE KIEPERT

Ludwig Kiepert – mathématicien allemand, 1846 - 1934

On construit trois triangles isocèles **semblables** de bases AB, AC, BC et de sommets respectifs C', B' A'.
Les droites AA', BB', CC' sont concourantes.

Les point de Fermat-Torricelli sont les intersections des segments reliant les sommets de ABC aux sommets de triangles de Kiepert particuliers : les triangles équilatéraux $K_{\pi/3}$

Les points de Napoléon sont aussi les intersections des segments reliant les sommets de ABC aux sommets de triangles de Kiepert particuliers.

Les points de Vecten sont aussi les intersections des segments relient les sommets de ABC aux sommets des triangles de Kiepert $K_{\pi/4}$.

Et les points de Rémy ?
Eux aussi. C'est bien joli ces pentagones, mais on n'en utilise que le sommet opposé. Par exemple, R_1 est l'intersection des segments reliant les sommets de ABC aux sommets des triangles de Kiepert $K_{\pi/5}$.

Quoi ? Et il a trouvé ça quand ce Kiepert ?
Il y a 140 ans.

Zut !
Bon, il n'y aura pas de points de Rémy.
Mais chapeau à vous Monsieur Kiepert.

LIEUX ISOGONAUX

On fixe un triangle ABC quelconque et une droite (Ɗ) quelconque.

P est un point variable sur (Ɗ).
On construit alors T, U, V les symétriques de P par rapport aux côtés de ABC, et **Q** est le centre du cercle circonscrit de TUV.
Comme on l'a vu avec le théorème du point isogonal, Q est le conjugué isogonal de P.
Rien de nouveau jusque-là.

On va s'intéresser au **lieu de Q lorsque P parcourt (Ɗ).**

Quand P parcourt un lieu (Ⱡ), le conjugué isogonal Q de P parcourt un lieu (Ⱡ') appelé **conjugué isogonal de (Ⱡ)**.

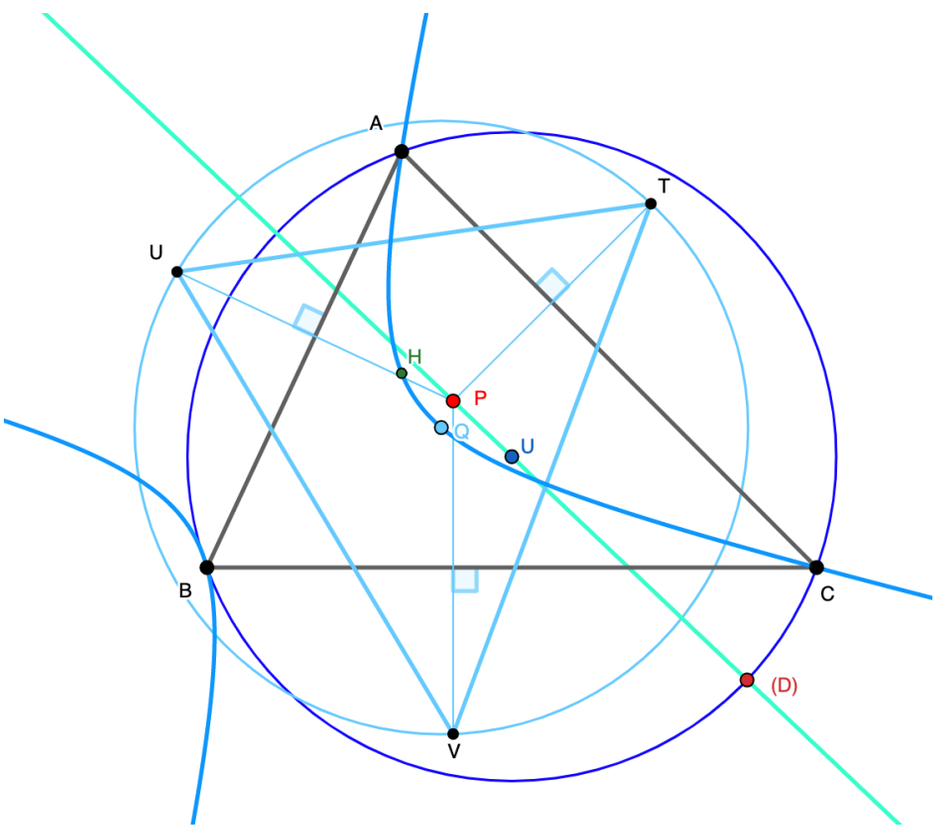
Dans le cas où **P parcourt une droite (Ɗ) quelconque**, on admet les résultats suivants :
Le conjugué isogonal d'une droite (Ɗ) quelconque est une conique circonscrite à ABC.
La conique lieu de Q est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon la position de (Ɗ) par rapport au cercle circonscrit à ABC.
Les asymptotes sont perpendiculaires aux droites de Simson des intersections de (Ɗ) avec le cercle circonscrit.

Dans le cas où **P parcourt une droite (Ɗ) de direction quelconque mais passant par U** (le centre du cercle circonscrit de ABC) les droites de Simson des points diamétralement opposés sont alors perpendiculaires et la conique est une **hyperbole équilatère (Ⱨ)**.

Lorsque P vient en U, alors Q devient le point isogonal conjugué de U, c'est à dire (comme on l'a aussi vu) l'orthocentre H de ABC.
Ainsi, pour toutes les droites (Ɗ) passant par U, toutes les hyperboles (Ⱨ) passent par H.

Donc lorsque (Ɗ) passe par U, le lieu de Q est une hyperbole (Ⱨ) équilatère passant par A, B, C, et H.
Ses asymptotes sont les droites de Simson des intersections de (Ɗ) avec le cercle circonscrit.

On va considérer 3 hyperboles particulières : celles passant par S, par O et par I.



L'HYPERBOLE DE KIEPERT - DIE KIEPERT HYPERBEL

C'est l'hyperbole équilatère (H) choisie pour passer par le centre de gravité S du triangle ABC.

Le conjugué isogonal de S est le point de Lemoine L de ABC - point de concours des symédianes.

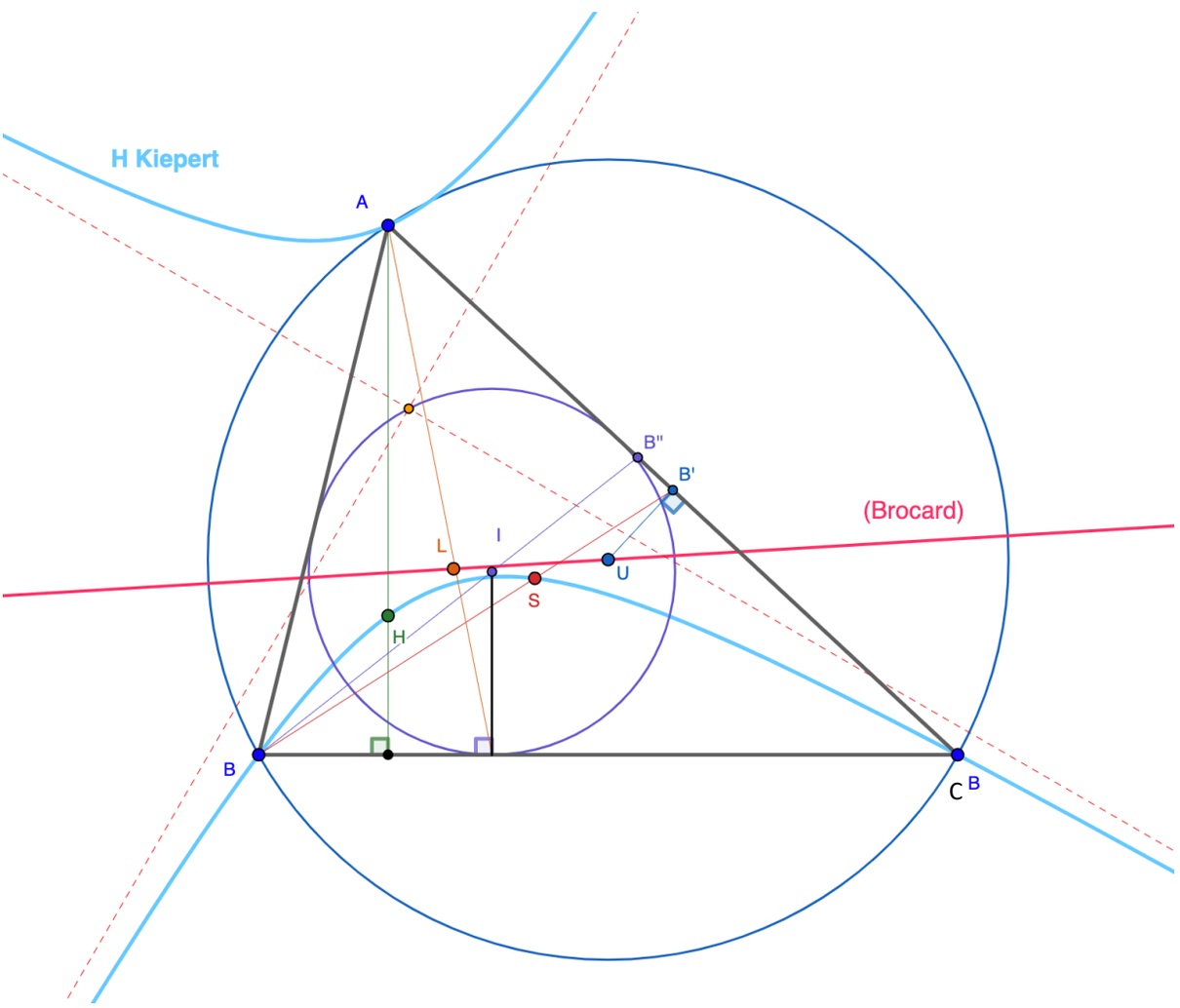
Cette hyperbole est donc la conjuguée isogonale de la droite (Ɗ) = UL

(UL) est aussi appelée **axe de Brocard** de ABC.

L'hyperbole de Kiepert est la conjuguée isogonale de l'axe de Brocard UL.

L'hyperbole de Kiepert passe donc par les points suivants :

- Les coins du triangle A, B, C
- L'orthocentre H
- Le centre de gravité S



Cependant la définition originale de l'hyperbole de Kiepert est toute autre :
On construit les trois triangles **isocèles semblables** de bases AB, AC, BC et de sommets respectifs K_C, K_B, K_A : les triangles de Kiepert (grisés sur la figure). **Les droites AK_A, BK_B, CK_C sont concourantes en Q.**

L'ensemble des points possibles pour K_B est UB' : la médiatrice de AC
Lorsque le point K_B parcourt (UB') l'angle CAK_B varie de +90 à -90
L'ensemble des points correspondants pour Q est le lieu de Q.
Le lieu de Q est **l'hyperbole de Kiepert** du triangle ABC – lieu défini ici sans conjugaison isogonale.

Regardons comment Q parcourt l'intégralité des 2 branches de l'hyperbole.
Commençons avec K_B à l'infini « en haut » et « descendons » jusqu'à l'infini « en bas ».
Lorsque K_B est à l'infini Q = H Intuitivement, plus K_B est loin, plus (HK_B) est proche d'être perpendiculaire à [AC].
Lorsque K_B = B' = m[AC] Q est l'intersection des médianes = S
Donc lorsque K_B parcourt toute la demi-droite au-dessus de B', Q ne parcourt que le petit segment HS de l'hyperbole, en passant - dans l'ordre - par Rémy 1, Fermat 1, Vecten 1, Napoléon 1.
La figure représente K_B à l'intersection des diagonales du carré apposé à [AC], donc sur la figure Q est en V_1.

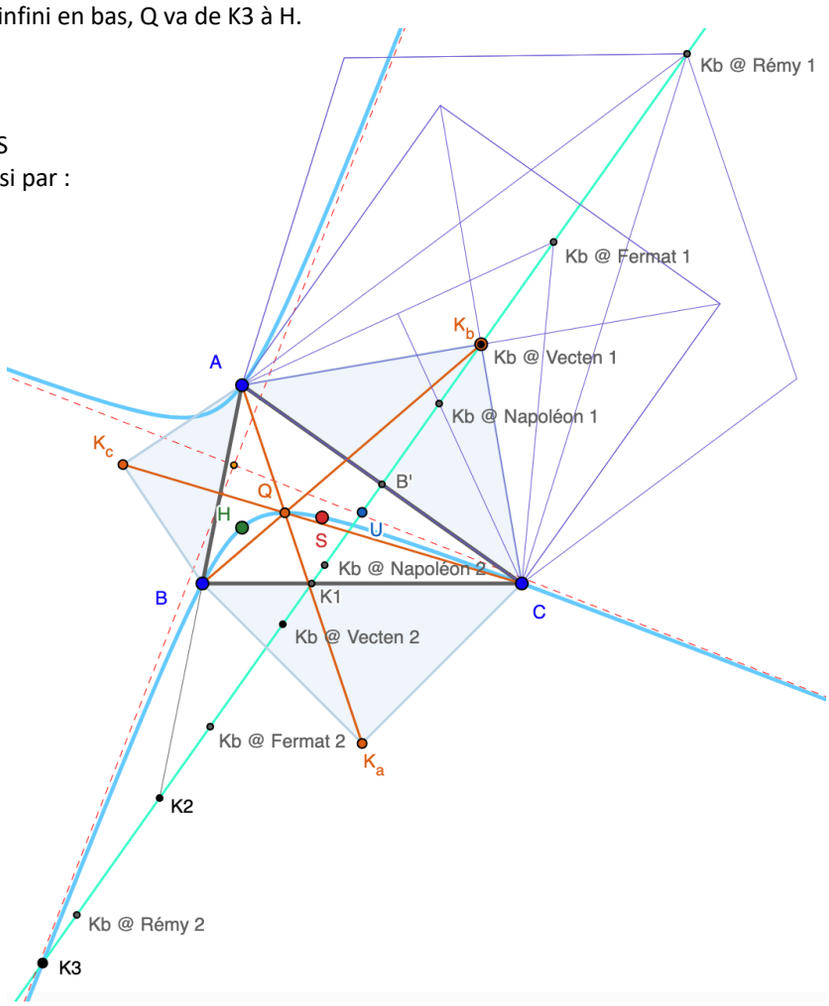
Pour K_B en dessous de B' les triangles de Kiepert sont orientés vers l'intérieur de ABC.
On introduit K1, K2, K3 les intersections de (UB') avec (BC), (AB), l'axe de l'hyperbole.
Lorsque K_B va de B' à K1, Q va de S à C en passant par N_2
Lorsque K_B est en K1, Q est en C.
R_1, F_1, V_1, N_1 et N_2 sont donc à l'intérieur du triangle ABC.

Lorsque K_B va de K1 à K2, Q s'enfuit à l'infini à droite sur la branche du bas et revient de l'infini à gauche sur la branche du haut.
Q est en A lorsque K_B est en K2.
Lorsque K_B va de K2 à K3, Q s'enfuit à l'infini à droite sur la branche du haut et revient de l'infini à gauche sur la branche du bas.

Lorsque K_B est en K3, Q = K_B = K3
Lorsque K_B descend de K3 vers l'infini en bas, Q va de K3 à H.
Q est en B quand Kc est sur (BC).

On comprend alors pourquoi
en plus de passer par A, B, C, H, S
l'hyperbole de Kiepert passe aussi par :

- Les 2 points de Fermat
- Les 2 points de Napoléon
- Les 2 points de Vecten
- Les « 8 points de Rémy »



L'HYPERBOLE DE JERABEK

C'est l'hyperbole équilatère (H) passant par le centre du cercle circonscrit U du triangle ABC.

Le conjugué isogonal de U est H.
Une telle hyperbole est donc la conjuguée isogonale de la droite (D) = UH qui est la **droite d'Euler** de ABC.

L'hyperbole de Jerabek est la conjuguée isogonale de la droite d'Euler.

S étant sur la droite d'Euler, son conjugué, à savoir le point de Lemoine L, est sur l'hyperbole de Jerabek.

L'hyperbole de Jerabek passe donc par les points suivants :

- Les coins du triangle A, B, C
- L'orthocentre H
- Le centre du cercle circonscrit U
- Le point de Lemoine L

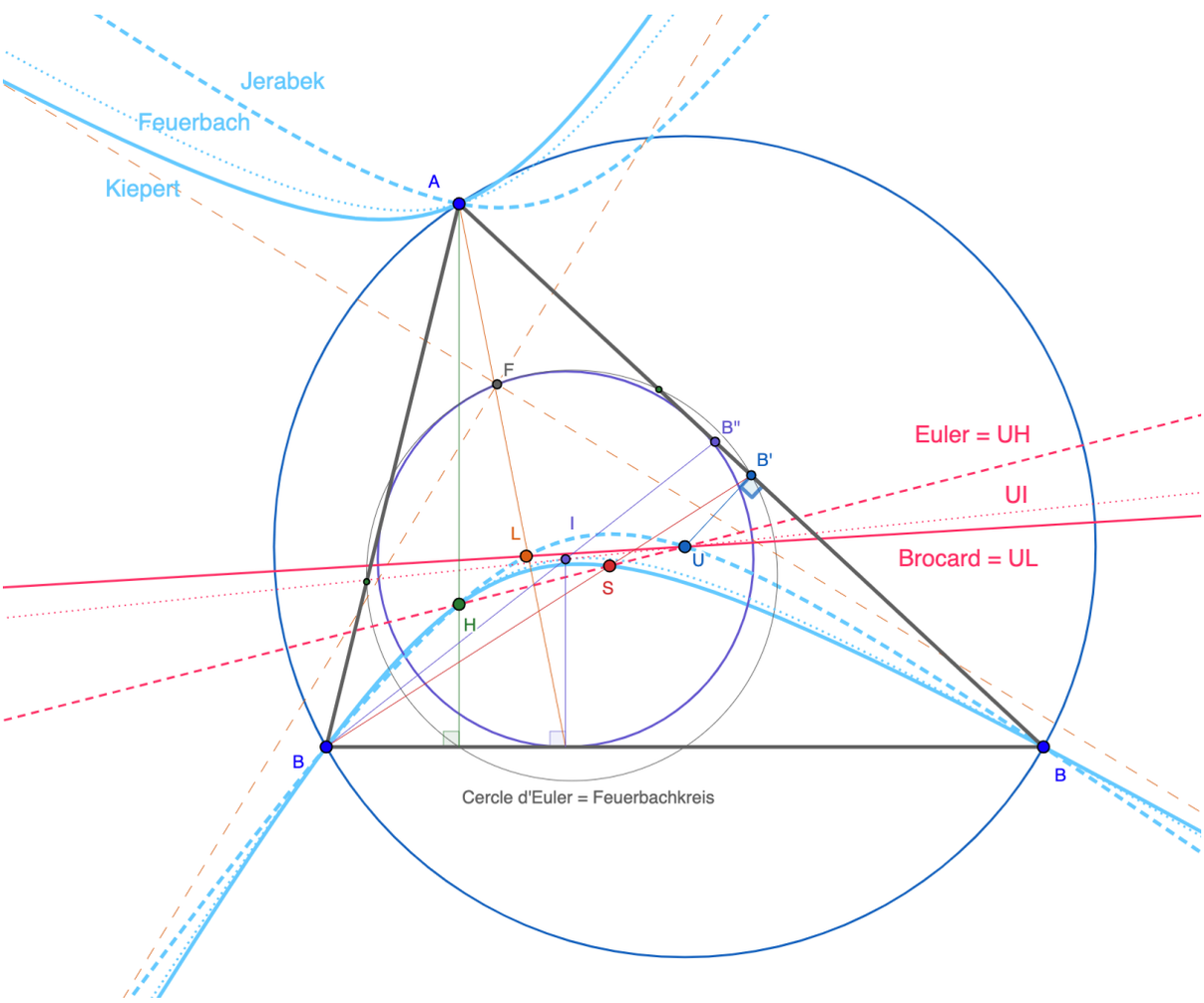
L'HYPERBOLE DE FEUERBACH

C'est l'hyperbole équilatère (H) passant par le centre du cercle inscrit I du triangle ABC.

Le conjugué isogonal de I est lui-même.
Une telle hyperbole est donc la conjuguée isogonale de la droite (D) = UI.

L'hyperbole de Feuerbach est la conjuguée isogonale de la droite UI.
Le centre de ses axes est le point de Feuerbach F, point de tangence du cercle d'Euler et du cercle inscrit.

L'hyperbole de Feuerbach passe donc par A, B, C, H, I



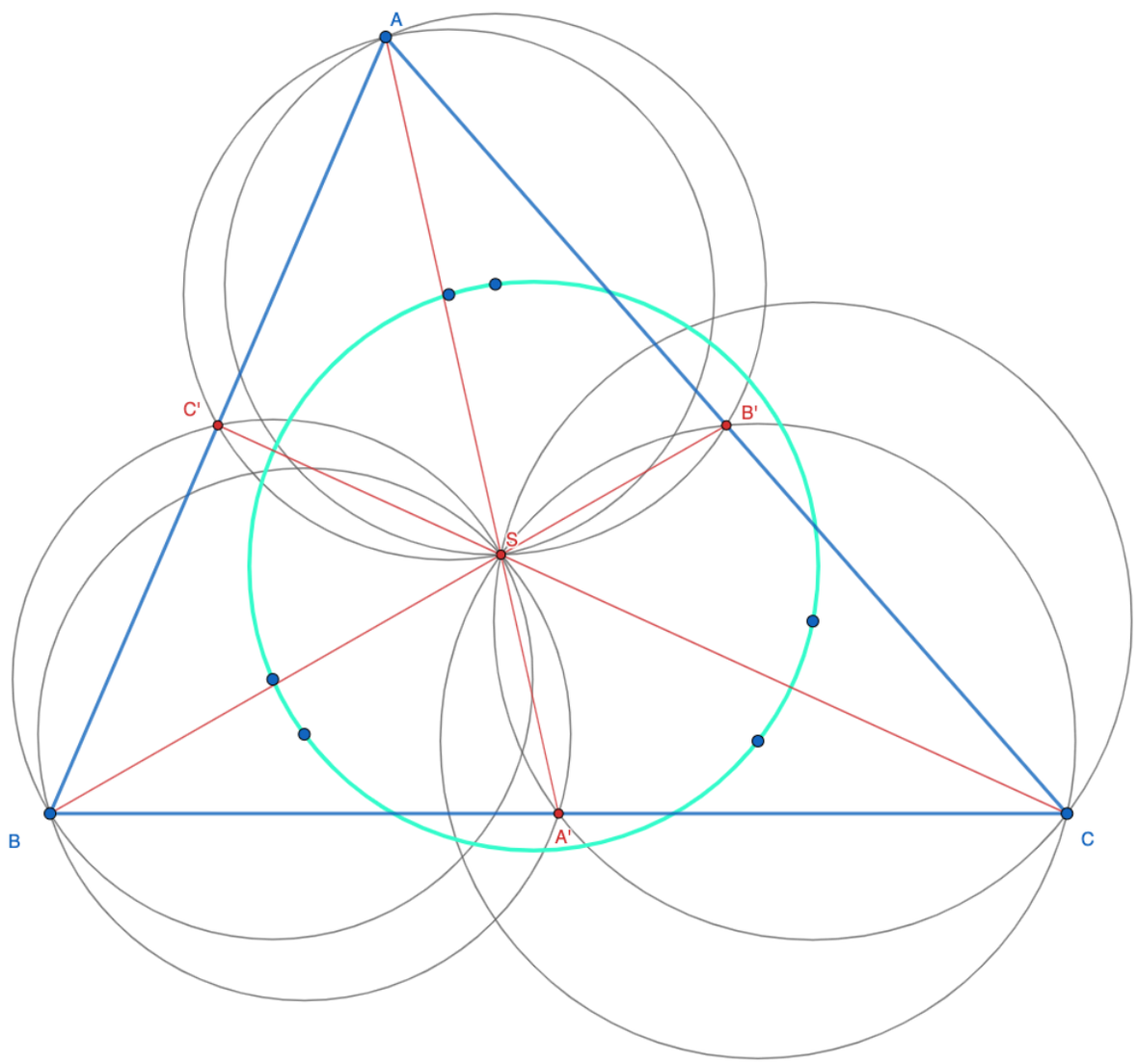
LE CERCLE DE VAN LAMOEN

Floor van Lamoen – géomètre néerlandais contemporain.

Die 6 Teildreiecke, in die das Dreieck von seinen Seitenhalbierenden zerlegt wird,
haben eine weitere Eigenschaft: ihre Umkreismittelpunkte liegen auf einem Kreis

Dieser Satz wurde erst 2000 von Floor van Lamoen veröffentlicht.

Der Kreis, auf dem die 6 Umkreismittelpunkte liegen, heißt demzufolge **Lamoenkreis** des Dreiecks ABC.



LE CERCLE DE LESTER

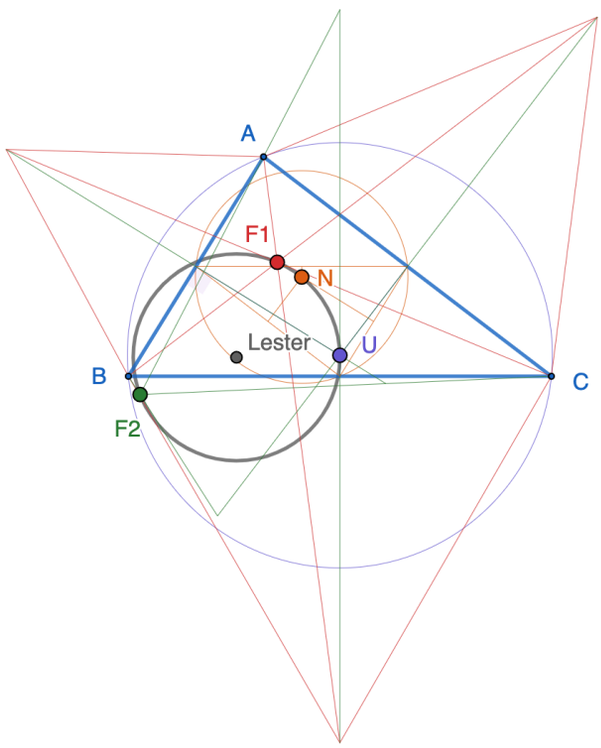
June Lester – géomètre canadienne contemporaine

Théorème de Lester (1997)

Dans tout triangle non isocèle il y a un cercle passant par les 4 points suivants :

- Le centre du cercle circonscrit **U**
- Le centre du cercle des 9 points **N**
- Le premier point de Fermat **F1**
- Le second point de Fermat **F2**

De plus les points apparaissent toujours dans l'ordre **U**-**N**-**F1**-**F2** (dans un sens ou l'autre).



Il y a toujours un cercle passant par 3 points donnés non alignés.
En revanche les cercles qui passent par 4 points, eux sont exceptionnels.
Et quand ces 4 points sont des points particuliers du triangle, c'est jackpot.
L'idée avec ces 2 derniers cercles c'est de montrer comment l'informatique moderne est mise à contribution.
Comment le théorème a-t-il été découvert ? Laissons la parole à June Lester :

I discovered the theorem by searching through a large number of special triangle points for quadruples of points which lie on a circle

- First, I needed a database of special points and their coordinates; I got it from Clark Kimberling's list of triangle centres. Clark uses trilinear coordinates, so I had to figure out how to convert trilinear coordinates into complex triangle coordinates.
- I next input everything - points, conversion formulas, cross ratio formulas - into an easy-to-use computer math program, *LiveMath*.
- Then I input a single numerical shape and set a search going for quadruples of special points with a real cross ratio.

The computer was a then state-of-the-art Mac IIcx; the computation was nevertheless time-consuming (several hours), and had to be repeated multiple times to be sure that those real cross ratios found were not a coincidence. Along the way, I discovered other quadruples of special points apparently on circles. These involve more obscure triangle centres than the four on the Lester circle, so I noted them in *Triangles III*, but didn't look for a proof.

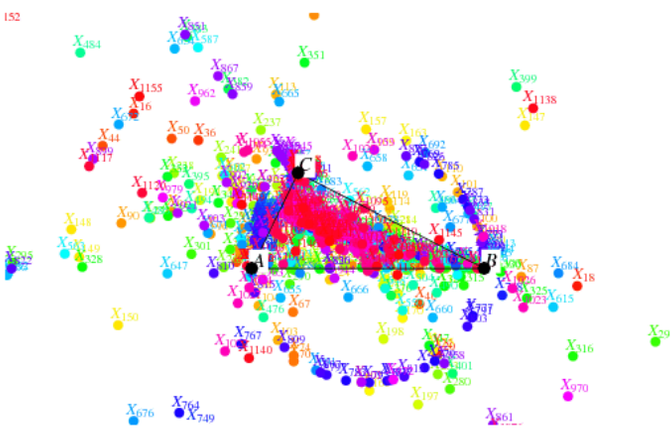
ENCYCLOPAEDIA OF TRIANGLE CENTERS

L'Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) est une liste de points spéciaux du triangle.
Elle ne cesse de grandir et en compte en 2021 plus de 43 000.
Elle est disponible en ligne et est maintenue par Clark Kimberling, University of Evansville, Indiana.
Chaque point remarquable se voit assigné un nombre de Kimberling de la forme X(n)

Y sont données ses coordonnées trilinéaires et barycentriques.

Ausgezeichnete Punkte im Dreieck

Name	Nummer
Inkreismittelpunkt	X(1)
Schwerpunkt	X(2)
Umkreismittelpunkt	X(3)
Höhenschnittpunkt (Orthozentrum)	X(4)
Mittelpunkt des Feuerbach-Kreises	X(5)
Lemoine-Punkt (Symmedianenpunkt, Grebe-Punkt)	X(6)
Gergonne-Punkt	X(7)
Nagel-Punkt	X(8)
Mittenpunkt	X(9)
Spieker-Punkt (Spieker-Zentrum)	X(10)
1. Fermat-Punkt	X(13)
2. Fermat-Punkt	X(14)
1. isodynamischer Punkt	X(15)
2. isodynamischer Punkt	X(16)
1. Napoleon-Punkt	X(17)
2. Napoleon-Punkt	X(18)
Clawson-Punkt	X(19)
Longchamps-Punkt	X(20)
Schiffler-Punkt	X(21)
Exeter-Punkt	X(22)
Bevan-Punkt	X(40)
Kosnita-Punkt	X(54)
Tarry-Punkt	X(98)
Steiner-Punkt	X(99)
Isoperimetrischer Punkt	X(175)
1. Vecten-Punkt	X(485)
2. Vecten-Punkt	X(486)



RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE QUELCONQUE

Il existe de très nombreuses relations métriques (i.e. de longueurs) dans le triangle.
Elles relèvent plus de la géométrie cartésienne – qui n'est explicitement pas l'objet de ce livre.
Il ne me semble pas particulièrement utile d'apprendre ces formules par cœur.
Il est cependant intéressant de savoir qu'elles existent et peut-être d'inciter à les retrouver soi-même.

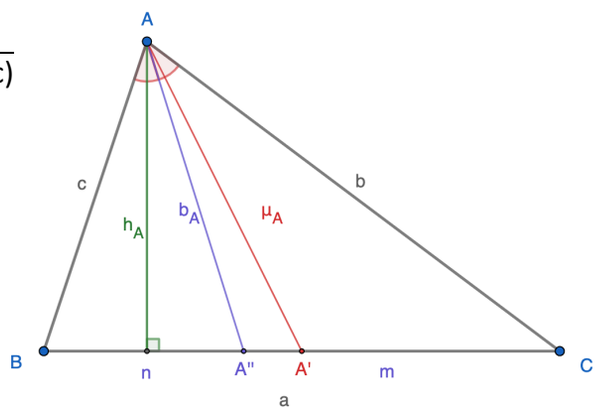
Une variable commode pour les calculs est le demi-périmètre $p = ½ (a + b + c)$

LONGUEURS

Hauteur $h_A = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

Bissectrice $b_A = bc - mn$
$n = BA'' \ \& \ m = A''C$
$b_A = 2\frac{\sqrt{bc}}{b + c}\sqrt{p(p - a)}$

Médiane $\mu_A^2 = ½ (b^2 + c^2) - ¼ a^2$



AIRE

Formule de base $S = ½$ base . hauteur

En fonction de r **$S = p.r$**

En fonction de r_A **$S = (p - a).r_A$**

Formule de Héron **$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c))}$**

Nous montrons ces 3 formules sur la page suivante

En fonction de R $S = abc / 4R$

RAYON DES CERCLES

Cercle inscrit $r = [(p – a) (p – b) (p – c) / p]^{½}$

Cercle A-exinscrit $r_A = [p (p – b) (p – c) / (p – a)]^{½}$

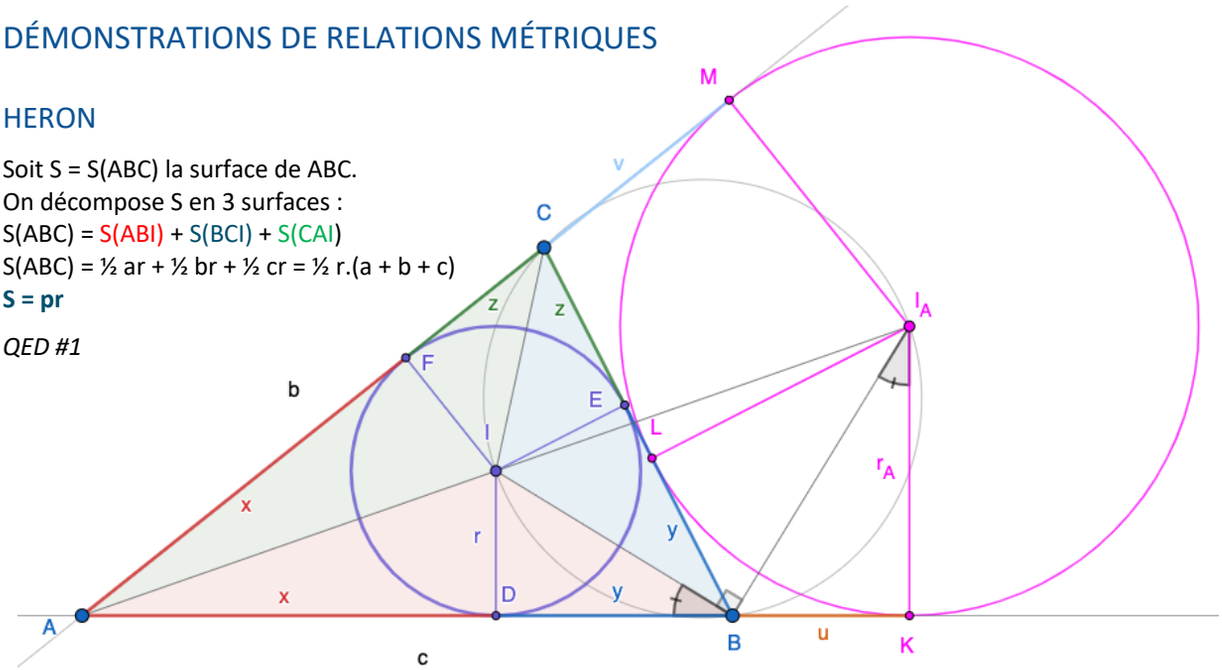
Cercle circonscrit $R = abc / \{4 [p (p – a) (p – b) (p – c)]^{½}\}$

DÉMONSTRATIONS DE RELATIONS MÉTRIQUES

HERON

Soit S = S(ABC) la surface de ABC.
On décompose S en 3 surfaces :
S(ABC) = S(ABI) + S(BCI) + S(CAI)
S(ABC) = ½ ar + ½ br + ½ cr = ½ r.(a + b + c)
S = pr

QED #1



AB = AD + DB c = x + y [1]
BC = BE + EC a = y + z [2]
AC = AF + FC b = x + z [3]

[2] + [3] - [1]
a + b - c = 2z
a + b + c -2c = 2z
2p – 2c = 2z
z = p - c [4]

[1] + [2] - [3]
a + c - b = 2y
a + b + c - 2b = 2y
2p - 2b = 2y
y = p - b [5]

[1] + [3] - [2]
b + c - a = 2x
a + b + c - 2a = 2x
2p - 2a = 2x
x = p - a [6]

Chasse aux tangentes : AM = AK
AC + CM = AD + DK b + v = c + u [7]
BC = BL + LC a = u + v [8]

[7] + [8]
a + b + v = c + 2u + v
2u = a + b - c
2u = a + b + c -2c
2u = 2p – 2c
u = p - c [9]

[8] - [7]
a - b - v = v - c
2v = a + c - b
2v = a + b + c - 2b
2v = 2p – 2b
v = p - b [10]

[9] & [10] **p = b + v** & **p = c + u** [11]
[4] & [9] ; [5] & [10] **u = z** & **v = y** *Une propriété intéressante à connaitre de cette configuration*

Alors par W:W:W **ADI ~ AKI_A** ID / DA = I_AK / AK
r / x = r_A / (c + u)
[6] & [11] r / (p - a) = r_A / p
pr = S = r_A (p - a) [12] *QED #2*

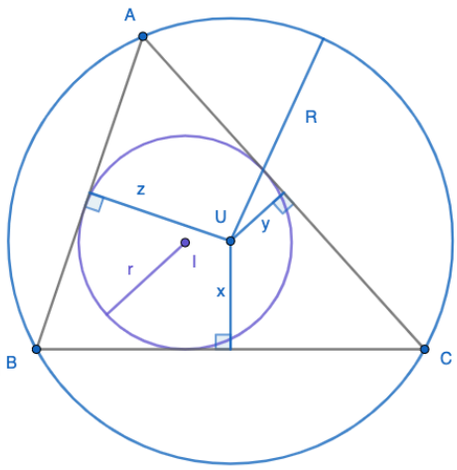
$S^2 = (p.r).(r_A.(p - a))$ $S = \sqrt{r.r_A.p(p - a)}$ [13]

ABK = 180 = *KBI_A* + *I_ABC* + *CBI* + *IBA* = 2 *I_ABC* + 2 *CBI* = 2 *I_ABI* 180 = 2 *I_ABI* donc ***I_ABI* = 90**
ABK = 180 = *KBI_A* + 90 + *IBD* *KBI_A = 90 – IBD* *BI_AK* = 90 - (90- *IBD*) = *IBD*

Alors par W:W:W **IDB ~ BKI_A** ID / DB = BK / KI_A
r / y = u / r_A
$r.r_A$ = yu
[5] & [9] $r.r_A$ = (p - b).(p - c) [14]
[13] & [14] **$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$** *QED #3*
Et voici la formule de Héron

THÉORÈME DE CARNOT

R + r = x + y + z



Démonstration

Soient A', B', C' les milieux de [AB], [BC], [CA]
UAB = 90 et *BC'U* = 90 donc A' et C' sont sur le cercle de diamètre [BU]
B, A', U, C' étant cocycliques, on peut y appliquer le

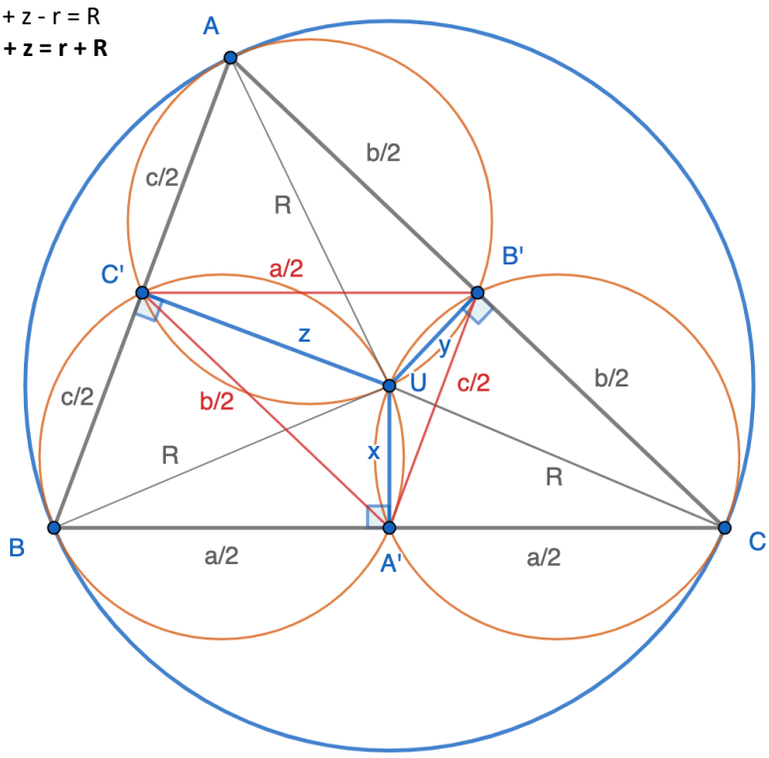
théorème de Ptolémée :	BC'.A'U + BA'.C'U = BU.A'C'	[1]
C' est le milieu de [AB] donc	BC' = c/2	
A' est le milieu de [BC] donc	BA' = a/2	
U est le centre du cercle circonscrit donc	BU = R	
Par le théorème de la droite des milieux	A'C' = ½ AC = b/2	
Donc [1] se réécrit	½ xc + ½ za = ½ Rb	[2]

De même :

A', C, B', U sont cocycliques		
CA'.B'U + CB'.A'U = CU.A'B'	½ ya + ½ xb = ½ Rc	[3]
B', A, C', U sont cocycliques		
AB'.C'U + AC'.B'U = AU.C'B'	½ zb + ½ yc = ½ Ra	[4]
[2] + [3] + [4]	½ (xc + xb + ya + yc + za + zb) = ½ R.(a + b + c)	
.2 et factorisation	x(b + c) + y(a + c) + z(a + b) = R (a + b + c)	
Avec la notation p = ½ (a + b + c)	x(2p - a) + y (2p - b) + z(2p - c) = 2pR	
	2px + 2py + 2pz - ax - by - cz = 2pR	
	2p.(x + y + z) - (ax + by + cz) = 2pR	[5]

La surface de ABC S(ABC) peut être décomposée en surfaces de 3 triangles de 2 façons différentes :
S(ABC) = S(BCU) + S(CAU) + S(ABU) = ½ ax + ½ bx + ½ cz = ½ (ax + by + cz)
S(ABC) = S(BCI) + S(CAI) + S(ABI) = ½ ar + ½ br + ½ cr = ½ r.(a + b + c) = pr
Donc ax + by + cz = 2pr [6]

[6] dans [5]	2p.(x + y + z) - 2pr = 2pR
/2p	x + y + z - r = R
	x + y + z = r + R
	QED



LA BOITE À OUTILS





La quasi-totalité des démonstrations de géométrie euclidienne repose sur les outils et méthodes présentés dans ce livre. Reste bien sûr à savoir les utiliser judicieusement, mais sachez que vous êtes parfaitement armés, que vous avez tout l'arsenal possible et imaginable à votre disposition.

Pour la **chasse aux angles** on a 6 outils :

- Somme des angles d'un polygone convexe à n côtés = (n-2).180
- Décomposition d'un angle plat en plusieurs composantes
- Un triangle isocèle a deux angles égaux
- Angles opposés et conjugués
- Angle au centre et angle inscrit
- Chasse aux angles droits : triangles inscrits sur un demi-cercle, médiatrices.

A-t-on mis en évidence des **cocyclités** utiles ?

La **chasse aux tangentes** fournit de nombreuses égalités de longueurs.

Ces 2 parties de chasse terminées, quelles **congruences** ou **similarités** intéressantes peut-on identifier ?

Les congruences prouvent	Les similarités prouvent
- des égalités d'angles	- des égalités d'angle
- des égalités de longueurs	- des égalités de rapports de longueurs
- des égalités de surface	- des proportions de surfaces

Dès qu'on voit des droites parallèles coupées par une autre on pense à **Thalès**.

Si l'on a à faire à des rapports de longueur dans un cercle, on pense au théorème des cordes ou au théorème des sécantes.
Si l'on a à faire à des rapports de longueur dans un triangle, on pense à Thalès ou à Menelaus.

Dès qu'on voit un produit de longueurs, donc une **surface**, il y a peut-être des formules de surface de triangle ou un centre de gravité de triangle pas loin.

Ne pas oublier le théorème de la bissectrice et celui de la droite des milieux.

Dès qu'il y a H, il y a des cocyclités et des triangles semblables dans tous les sens.

*Faut-il montrer que des **points** sont **cocycliques** (qu'ils sont sur un même cercle) ?*
Il existe toujours un cercle passant par 3 points donnés. Pour prouver que A, B et C sont sur le même cercle de centre O, il suffit par exemple de prouver que OA = OB = OC.
Pour 4 points, on peut utiliser le théorème de l'angle inscrit ou de Ptolémée.

*Faut-il montrer que des **points** sont **colinéaires** (qu'ils sont alignés) ?*
On peut utiliser le théorème de Menelaus.
On peut aussi observer si ça a à voir avec les droites de Simson, Steiner, Newton, ou Miquel.

*Faut-il montrer que des **droites** sont **concourantes** (qu'elles se coupent en un même point) ?*
Probablement Ceva.

*Faut-il montrer que des **droites** sont **parallèles ?***
On peut utiliser la réciproque du théorème de Thalès.

*Faut-il montrer que deux **cercles** sont **tangents ?***
Chercher un cercle d'inversion par lequel l'image des 2 cercles est une droite et un cercle tangents.
Les théorèmes de Reim-Ayme.

CONSEILS DE RÉSOLUTION ET DE RÉDACTION

• Commencez par transcrire l'énoncé en faisant une figure - **la plus grande possible** - qui représente le cas général : si on parle d'un triangle quelconque, ne pas en tracer un isocèle ou rectangle !

• Ajoutez sur votre figure toutes les informations implicites :
S'il est question du centre du cercle circonscrit, tracez ce cercle, identifiez les points cocycliques.
S'il est question du cercle inscrit, ajoutez bissectrices et points de tangence.

• N'hésitez pas à faire une nouvelle figure pour représenter une conjecture. Cela peut éclairer les étapes intermédiaires de votre démonstration.

• Reportez sur votre figure les points et les angles que vous avez introduits,
dessinez-les en couleur, donnez-leur des noms.

• Définissez bien les objets que vous introduisez
« Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AB] » ; « soit M le projeté orthogonal de P sur ... »

• Annoncez les étapes de votre raisonnement s'il est un peu long :
« On commence par une chasse aux angles »
« Montrons que les triangles ABC et MNP sont semblables »

• Il n'y a pas de pénurie de papier : prenez une nouvelle page s'il le faut.

• Ce n'est pas de la littérature, n'hésitez pas à répéter les mêmes tournures de phrase.
Commencez chaque nouvelle phrase sur une nouvelle ligne.
Les répétitions, volontaires, ne rajoutent pas de la lourdeur - bien au contraire !
Avec une bonne indentation elles contribuent à la clarté du raisonnement et facilitent sa compréhension par le lecteur.
Vous l'aurez peut-être remarqué, c'est une technique utilisée systématiquement dans ce livre.

• Évitez les phrases passives.
Soyez le plus bref possible.
Proscrivez l'emploi de : facile, évident, trivial, rapidement, on voit clairement, il n'y a qu'à…

Formulation utile :

Sans limitation de généralité = ohne Beschränkung der Allgemeinheit oBdA

Formules de fin de démonstration :

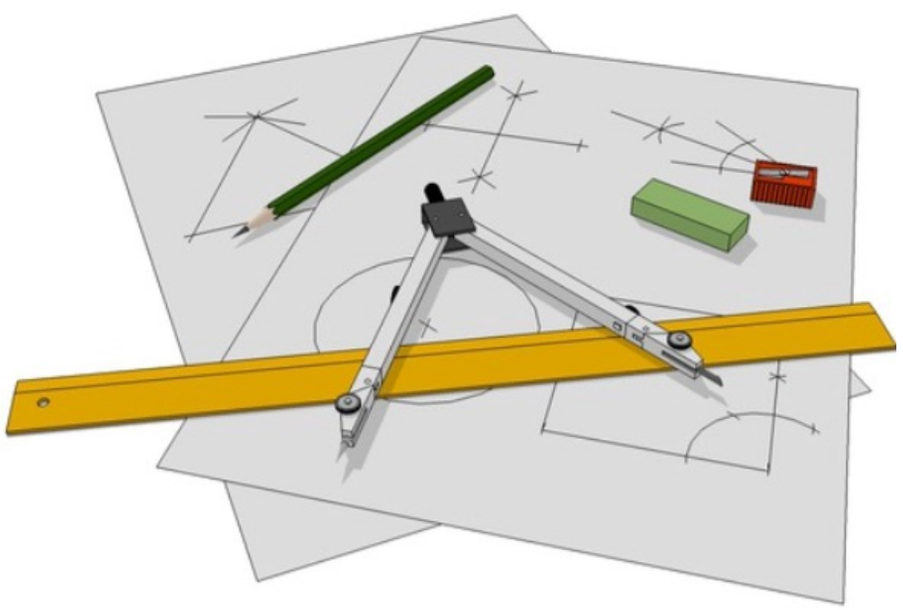
CQFD Ce qu'il fallait démontrer

Was zu beweisen war

QED Quod erat demonstrandum

□

CONSTRUCTION À LA RÈGLE ET AU COMPAS



Les règles du jeu

Nous avons à notre disposition un compas et une règle **ni graduée ni marquée**.
Partant de 2 points sur une feuille, on peut tracer des cercles et des droites, construire d'autres points en respectant les conditions suivantes :
• on peut tracer une droite entre deux points déjà construits ;
• on peut tracer un cercle dont le centre est un point construit et qui passe par un autre point construit ;
• on peut utiliser les points obtenus comme intersections de deux droites tracées, ou bien intersections d'une droite et d'un cercle tracé, ou bien intersections de deux cercles tracés.

La problématique

Que peut-on construire avec ces 3 règles ?
C'est l'objet du reste de ce chapitre. Attachez vos ceintures, c'est assez impressionnant.

CONSTRUCTIONS GÉOMETRIQUES DE BASE

A, B, C étant trois points donnés du plan, on a appris au collège comment construire à la règle et au compas :

- Le **symétrique** de B par rapport à A

- La **médiatrice** du segment [AB]

- Le **milieu** I du segment [AB].

- La **parallèle** à la droite (AB) passant par C.

- La **perpendiculaire** à (AB) **passant par un point** C

- La **bissectrice de** (AB) et (AC)

- Additionner, rapporter des angles et des longueurs

- Le **parallélogramme** - qui justifie la **conservation de l'écartement du compas**

- Le **triangle équilatéral**

- L'**hexagone régulier**

- Les **angles** de 90, 60, 30, 15, 45 degrés…

On assume ici ces techniques connues.

Je recommande pour s'entrainer l'appli / jeu **Euclidea** – disponible sur téléphone portable et ordinateur.
C'est progressif, mais la quasi-totalité des notions de ce livre seront nécessaires pour en venir complètement à bout !

ARITHMÉTIQUE À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Regardons maintenant comment on peut « faire de l'arithmétique » à la règle et au compas.

Nombre constructible

On considère le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé, que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$.

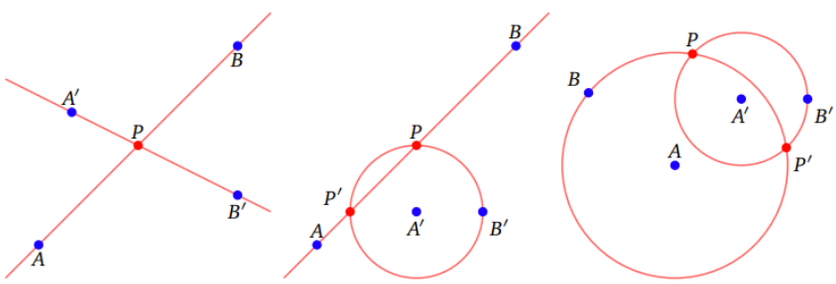
On se donne au départ un ensemble composé de deux points : $C_0 = \{O, I\}$ où $O = (0, 0)$ et $I = (1, 0)$.
Pour $i > 0$ supposons qu'un ensemble de points $C_i \subset \mathcal{P}$ soit déjà construit.
On définit C_{i+1} par récurrence, comme l'ensemble des **points élémentairement constructibles** à partir de Ci. C'est-à-dire : $P \in C_{i+1}$ si et seulement si

$P \in Ci$ ou
$P \in (AB) \cap (A'B')$ avec $A, B, A', B' \in C_i$ ou
$P \in (AB) \cap \mathcal{C}(A',A'B')$ avec $A, B, A', B' \in C_i$ ou
$P \in \mathcal{C}(A,AB) \cap \mathcal{C}(A',A'B')$ avec $A, B, A', B' \in C_i$

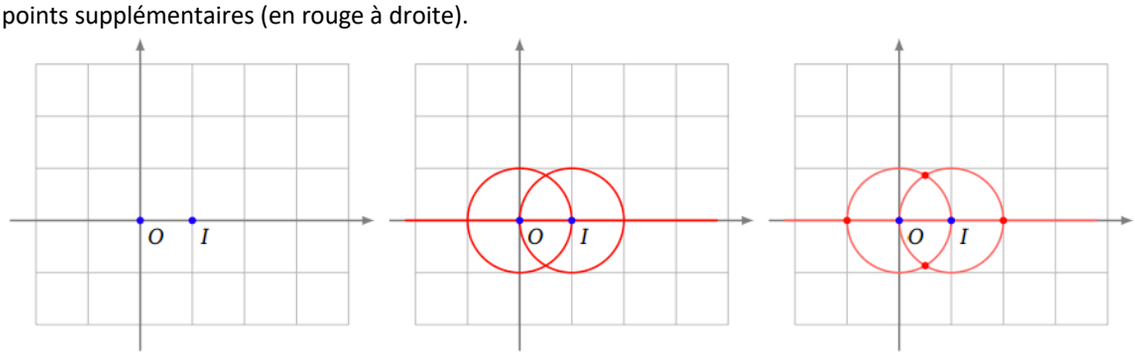
$\mathcal{C}(A, r)$ est le cercle de centre A et de rayon r.

Si A, B, A', B' ont été construits et sont dans C_i alors on peut construire de nouveaux points de trois façons :

Les points A, B, A', B' en bleu sont dans C_i Les points P, P' en rouge sont dans C_{i+1}



Première étape :
Partant de C_0 (en bleu à gauche), on peut tracer une droite et deux cercles (au milieu), ce qui donne pour C_1 quatre points supplémentaires (en rouge à droite).



Pour C_2 on part des 6 points de C_1 et on trace toutes les combinaisons de cercles et droites possibles.
Les points d'intersection forment l'ensemble C_2.

Par récurrence, on montre ainsi que $\mathbb{Z}$ est constructible.

$C = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ est l'ensemble des **points constructibles**
$P \in C$ ssi il existe $i > 0$ tel que $P \in C_i$

$C_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points constructibles : ce sont les **nombres réels constructibles**.

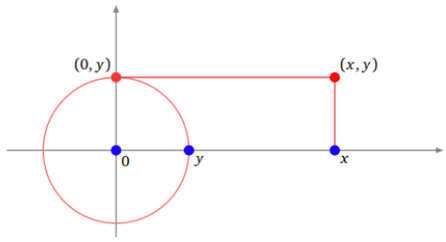
$C_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$ est l'ensemble des affixes des points constructibles : ce sont les **nombres complexes constructibles**.

Attention : même si deux points A, B sont constructibles et que l'on peut tracer la droite (AB), seuls les points d'intersection de (AB) avec d'autres objets construits sont constructibles – pas tous les points de (AB).

Déterminer l'ensemble des points constructibles C ou déterminer l'ensemble des nombres constructibles $C_{\mathbb{R}}$ sont deux problèmes équivalents.

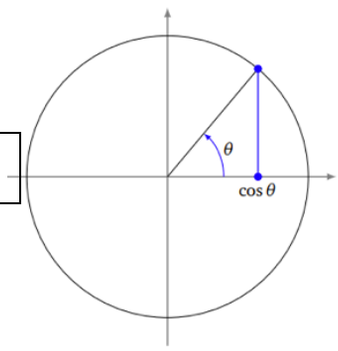
En effet, si (x, y) est un point constructible alors par projection sur l'axe des abscisses nous obtenons le réel constructible x, et de même pour y projection sur l'axe des ordonnées, puis report sur l'axe des abscisses.

Réciproquement on peut passer de deux nombres constructibles x, y $\in \mathbb{R}$ à un point constructible (x, y) dans le plan :
- partant du point (y, 0) on construit (0, y) sur l'axe des ordonnées.
- (x, y) est l'intersection des parallèles aux axes passant par (x,0) et (0, y)



Angle constructible

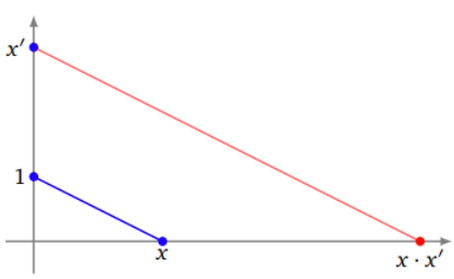
Construire un angle géométrique de mesure θ est équivalent à construire le nombre réel cos θ

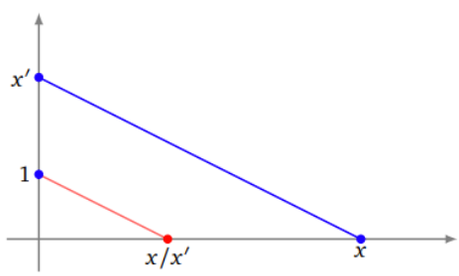


Construction de n'importe quel nombre rationnel

Construction du produit de deux nombres réels x·x' :
On suppose construits les points (x, 0) et (0, x') (dessin de gauche).
On trace la droite D passant par (x, 0) et (0, 1).
On construit ensuite – à la règle et au compas – la droite D' parallèle à D et passant par (0, x').
Le théorème de **Thalès** prouve que D' coupe l'axe des abscisses en (x·x',0).

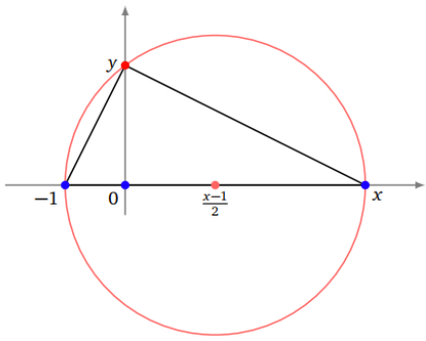
On utilise la même méthode pour construire x/x' (dessin de droite).





$\mathbb{Z}$ étant constructible, on a ainsi montré que $\mathbb{Q}$ est constructible

Construction de la racine carrée de n'importe quel nombre rationnel positif

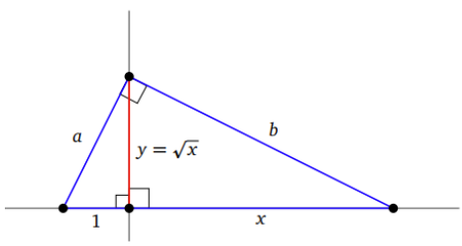


Soient les nombres constructibles 0,-1, x placés sur l'axe des abscisses.
Traçons le cercle de diamètre [−1, x]
Ce cercle coupe l'axe des ordonnées en y > 0.

On applique le théorème de Pythagore dans trois triangles rectangles :
$a^2 + b^2 = (1 + x)^2$
$1 + y^2 = a^2$
$x^2 + y^2 = b^2$

On en déduit $a^2 + b^2 = (1 + x)^2 = 1 + x^2 + 2x$ d'une part
et $a^2 + b^2 = 1 + x^2 + 2y^2$ d'autre part.
Ainsi $1 + x^2 + 2x = 1 + x^2 + 2y^2$
D'où $x = y^2$

Comme y > 0 on a $y = \sqrt{x}$



La racine carrée de n'importe quel nombre rationnel positif est donc constructible.

Une version simplifiée de la constructibilité - niveau olympiades lycéennes :

Definition
Eine **Konstruktion** heißt **elementar** genau dann, wenn sie sich allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal ohne Maßeinteilung durchführen lässt. Dabei werden folgende **Axiome** zugrunde gelegt.

A1 Es ist stets möglich, durch 2 verschiedene Punkte genau eine Gerade zu ziehen.
A2 Der gemeinsame Punkt zweier nichtparalleler Geraden lässt sich stets eindeutig konstruieren.
A3 Es lässt sich stets ein Kreis zeichnen, wenn sein Mittelpunkt und mindestens ein Punkt seiner Peripherie gegeben sind.
A4 Zu einem gegebenen Kreis und einer gegeben, diesen Kreis schneidenden Geraden lassen sich stets die beiden Schnittpunkte eindeutig konstruieren.
A5 Es ist stets möglich, die beiden Punkte eindeutig zu konstruieren, die zwei einander schneidenden Kreisen gemeinsam sind.

Die bekanntesten elementar nicht lösbaren Konstruktionsaufgaben sind die Würfelverdoppelung, die Winkeldreiteilung, die Quadratur des Kreises, die Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks.

Satz
Sind a und b die Längen zweier gegebenen Strecken, wobei die Länge einer Einheitsstrecke mit vorgegeben ist, dann kann man Strecken mit den folgenden Längen elementar konstruieren:
a + b a - b a.b a/b $a^{1/2}$ r.a *für eine beliebige rationale Zahl r*

Kurz gesagt: **ein Term lässt sich elementar konstruieren genau dann, wenn er nur rationale Rechenoperationen und Quadratwurzeln enthält.**

Pour deux longueurs constructibles ou données x et y, on peut construire à la règle et au compas leur

somme **soustraction** **multiplication** **division**
inverse **carré** **racine**

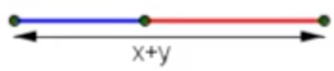
Pour toutes les constructions de ces 3 pages, on assume que :

- 1 est donné. C'est notre étalon. Qu'il s'agisse du mètre, du cm, du pouce, ou d'une quelconque autre longueur arbitraire, peu importe.
- x et y sont constructibles ($\in C_{\mathbb{R}}$) ou donnés ($\in \mathbb{R}$)

Les longueurs constructibles sont des éléments de l'ensemble $C_{\mathbb{R}}$ (défini il y a 3 pages), un ensemble qui inclus $\mathbb{Q}$ mais qui est lui-même inclus dans $\mathbb{R}$. Plus de détails avec Wantzel dans 3 pages.
Il y a un peu de répétition avec les pages précédentes, mais il y a une différence subtile. Par exemple, même si π n'est pas constructible, si on nous le « donne » on peut tout à fait construire 2π.

CONSTRUIRE x + y

C'est rapporter x puis y sur une droite.



CONSTRUIRE x - y

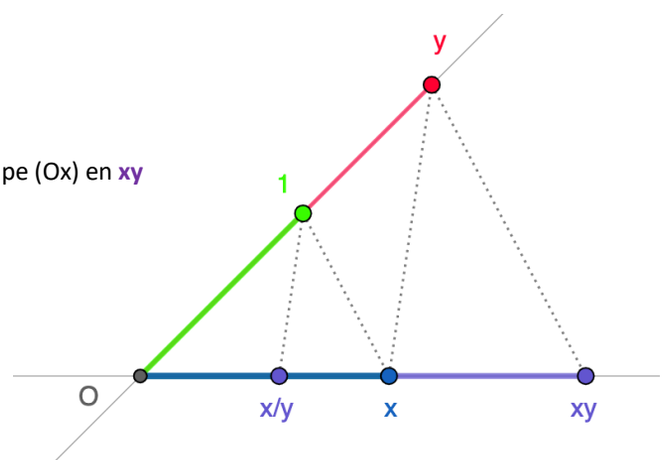
C'est rapporter x puis y dans l'autre sens sur une droite.



CONSTRUIRE x.y

Sur deux droites sécantes :
1. On rapporte **x** sur une droite.
2. On rapporte **1** et **y** sur l'autre droite.
3. On trace la parallèle à (x1) passant par y : elle coupe (Ox) en **xy**

En effet, d'après Thalès : y / 1 = xy / x



CONSTRUIRE x / y

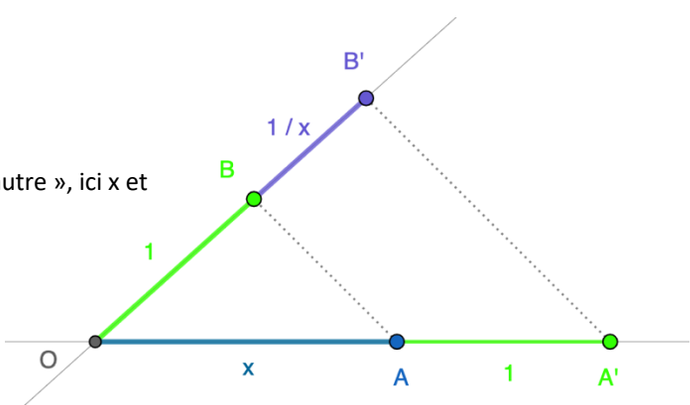
Sur deux droites sécantes :
1. On rapporte **x** sur une droite.
2. On rapporte **1** et **y** sur l'autre droite.
3. On trace la parallèle à (xy) passant par 1 : elle coupe (Ox) en **x/y**

En effet, d'après Thalès : y / 1 = x / (x/y)

CONSTRUIRE 1/x

Sur deux droites sécantes :
1. On rapporte x et 1 sur une droite : OA = x et AA' = 1
(attention : ci-dessus 1 et y sont « l'un au-dessus de l'autre », ici x et 1 sont « l'un derrière l'autre »)
2. On rapporte 1 sur l'autre droite : OB = 1
3. On trace A'B', parallèle à AB passant par A'.

D'après le théorème de Thalès BB'/OB = AA'/OA
donc BB' /1 = 1 / x BB' = 1 / x

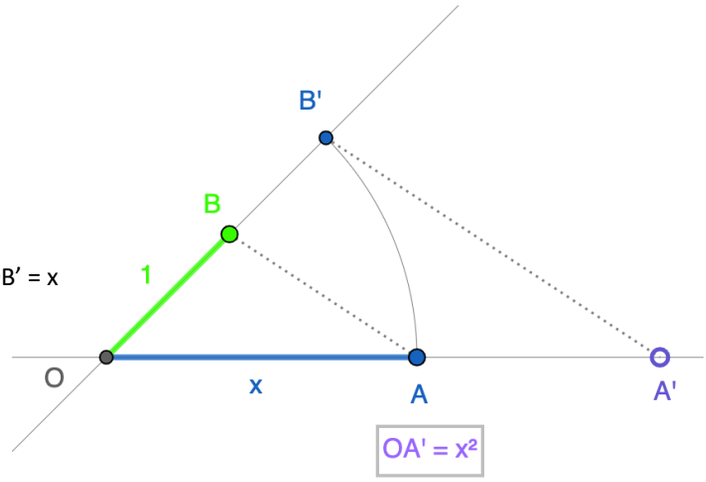


CONSTRUIRE x^2 (connaissant 1 et x)

Variante 1

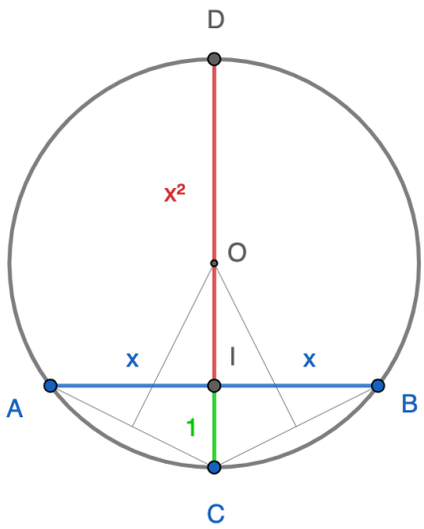
Sur deux droites sécantes :
1. On rapporte x sur une droite : OA = x
2. On rapporte 1 et x sur l'autre droite : OB = 1 et OB' = x
3. On trace A'B', parallèle à AB passant par B'.

D'après le théorème de Thalès OB'/OB = OA'/OA
donc x / 1 = OA' / x **OA' = x^2**



Variante 2

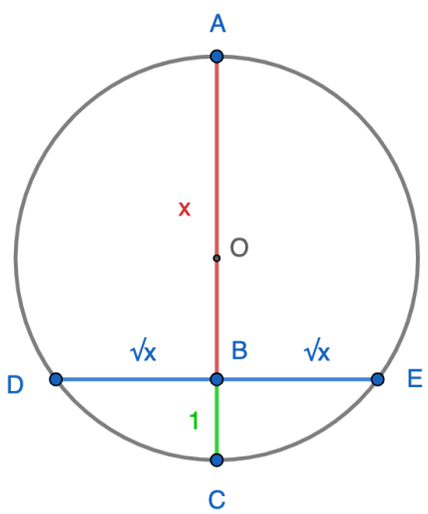
On trace les segments IA et IB de longueur a
et le segment IC perpendiculaire à AB de longueur 1.
Les médiatrices de AC et BC se coupent en O,
centre du cercle circonscrit.
Dans ACI on a $AC^2 = 1 + x^2$
Dans ADI on a $AD^2 = ID^2 + x^2$
Dans ACD on a $AC^2 + AD^2 = (1+ID)^2$
Donc $1 + x^2 + ID^2 + x^2 = 1 + 2\,ID + ID^2$
$2\,x^2 = 2\,ID$
ID = x^2



CONSTRUIRE $\sqrt{x}$ (connaissant 1 et x)

Variante 1

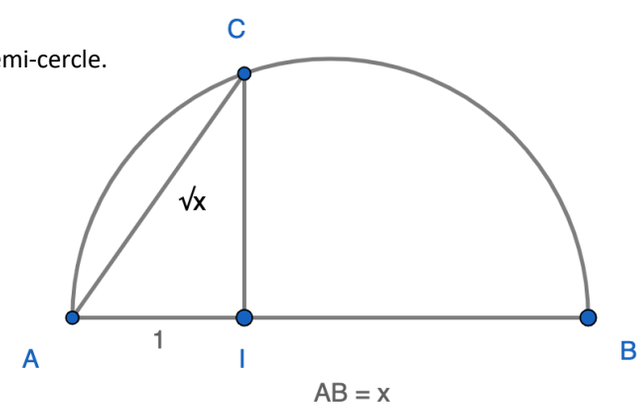
En se basant sur la construction précédente :
On rapporte x et 1 sur une droite : AB = x et BC = 1
On trace le cercle de diamètre AC = 1+x.
La racine de x apparait sur la perpendiculaire à AC en B :
BD = BE = $\sqrt{x}$



Variante 2

1. On trace le demi-cercle de diamètre AB = x (x>1)
2. On marque I tel que AI = 1
3. C est l'intersection de la perpendiculaire à AB en I et du demi-cercle.

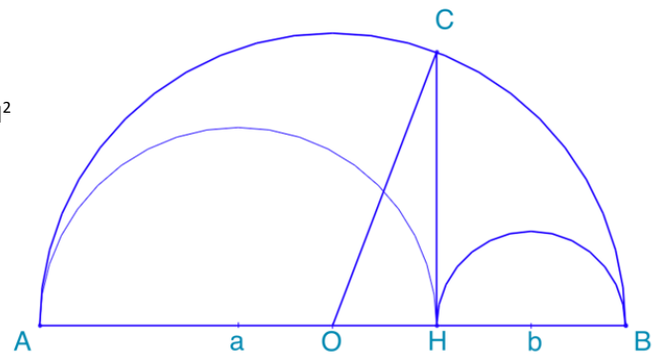
Dans ACI on a $AC^2 = 1 + IC^2$
Dans BCI on a $BC^2 = IC^2 + (x-1)^2$
Dans ABC on a $x^2 = AC^2 + BC^2$
$x^2 = AC^2 + IC^2 + (x-1)^2$
$x^2 = AC^2 + AC^2 - 1 + (x-1)^2$
$x^2 = 2\,AC^2 + x^2 - 2x$
$AC^2 = x$
AC = $\sqrt{x}$



CONSTRUIRE $\sqrt{ab}$

On construit l'Arbelos (die Sichel des Archimedes) constituée de 3 demi-cercles de diamètres a, b et a+b.

AH = a **BH = b** **CH = $\sqrt{ab}$**

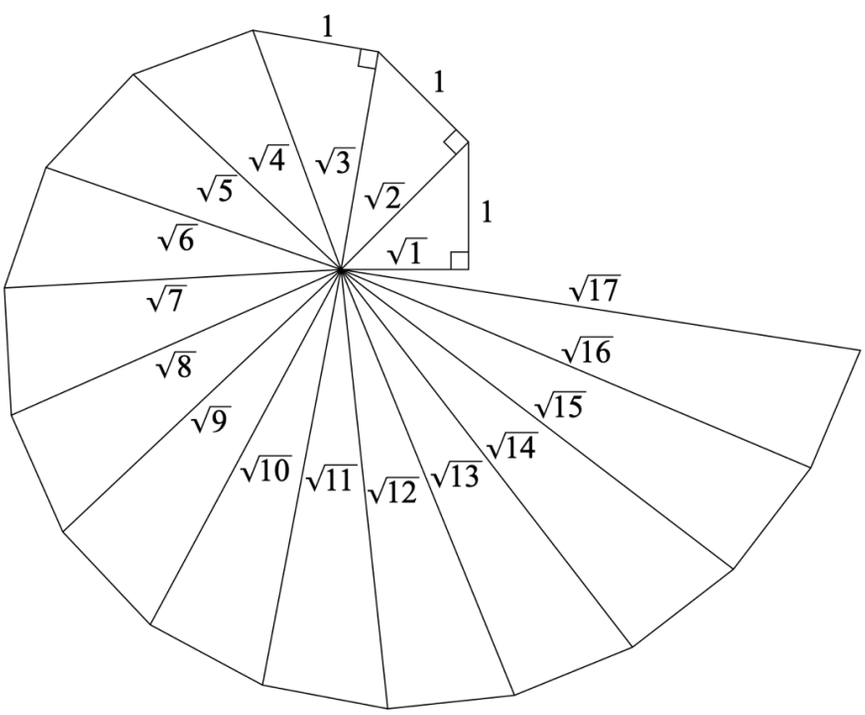


Démonstration :
Dans le triangle rectangle COH on a $OC^2 = OH^2 + CH^2$
$CH^2 = OC^2 - OH^2$
$CH^2 = ((a+b)/2)^2 - ((a+b)/2-b)^2$
$CH^2 = ¼ ((a+b)^2 - (a-b)^2)$
$CH^2 = ab$

LE COQUILLAGE DES RACINES

n+1 = n + 1

$$(\sqrt{n+1})^2 = (\sqrt{n})^2 + 1^2$$



ENSEMBLE DES NOMBRES CONSTRUCTIBLES – THÉORÈME DE WANTZEL

Pour clore le sujet des nombres constructibles en beauté on a besoin de faire appel à des notions d'algèbre moderne i.e. datant du début du XIXème siècle. C'est du niveau de l'enseignement supérieur mais, je l'espère, exprimé de façon compréhensible pour les lycéens motivés.
On est à seulement 4 pages de l'apothéose – ce serait dommage de s'arrêter si prêt du sommet.

CORPS, EXTENSIONS QUADRATIQUE

Un **corps (**$\mathbb{K}$,+,·) est un ensemble $\mathbb{K}$ auquel est associé deux opérations + et · vérifiant :

1. + et · sont des **lois de composition interne** — $\forall x, y \in \mathbb{K}$, $x + y \in \mathbb{K}$ et $x \cdot y \in \mathbb{K}$
2. ($\mathbb{K}$,+) est un groupe commutatif :
   - la loi + est **associative** — $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$
   - $\mathbb{K}$ possède un **élément neutre 0** pour la loi + — $\exists\, 0 \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in \mathbb{K}$, $x + 0 = x$ et $0 + x = x$
   - il existe un **opposé** -x dans $\mathbb{K}$ pour la loi + — $\forall x \in \mathbb{K}\ \exists -x \in \mathbb{K}$ tel que $x + (-x) = 0$
   - la loi + est **commutative** — $\forall x, y \in \mathbb{K}$, $x + y = y + x$
3. ($\mathbb{K} \setminus \{0\}$,·) est un groupe commutatif :
   - la loi x est **associative** — $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
   - $\mathbb{K}$ possède un **élément neutre 1** pour la loi · — $\exists\, 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $\forall x \in \mathbb{K}$, $x \cdot 1 = x$ et $1 \cdot x = x$
   - il existe un **inverse** x^{-1} dans $\mathbb{K}$ pour la loi · — $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{K}$ tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$
   - la loi · est **commutative** — $\forall x, y \in \mathbb{K}$, $x \cdot y = y \cdot x$
4. · est **distributive** sur + — $\forall x, y, z \in \mathbb{K}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Soit l'ensemble $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient tout $\mathbb{Q}$, mais aussi des éléments non rationnels tels que $\sqrt{2}$.
Montrons que muni des lois usuelles d'addition et de multiplication ($\mathbb{Q}$,$\sqrt{2}$) est un corps.

Soient $a + b\sqrt{2}$ et $a' + b'\sqrt{2}$ deux éléments de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Somme $(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a+a') + (b+b')\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$	+ est une lci
Produit $(a+ b\sqrt{2}) \cdot (a'+ b'\sqrt{2}) = aa'+2bb'+(ab'+a'b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$	· est une lci
Opposé $-(a + b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$	il existe un opposé pour +
Inverse $1/(a + b\sqrt{2}) = (a - b\sqrt{2})/(a^2 - 2b^2) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$	il existe un inverse pour ·
Il y a commutativité pour + et ·	
0 est élément neutre pour + & 1 est élément neutre pour ·	
Il y a distributivité de · sur +	→ **$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est donc un corps**

Comme ce corps contient $\mathbb{Q}$ on a montré que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est une extension de $\mathbb{Q}$.

On peut généraliser l'exemple précédent : si $\mathbb{K}$ est un corps et δ est un élément de $\mathbb{K}$ alors
$\mathbb{K}(\sqrt{\delta}) = \{a+b\sqrt{\delta} \mid a, b \in \mathbb{K}\}$ est un corps.
On vérifie comme ci-dessus que la somme, le produit, l'opposé et l'inverse de deux éléments restent dans $\mathbb{K}(\sqrt{\delta})$

Pour deux corps $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, alors $\mathbb{L}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une extension de $\mathbb{K}$.
La dimension de $\mathbb{L}$ = degré de l'extension $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = 2$

Si $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$ sont trois corps avec $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ et si les extensions ont un degré fini alors : $[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}] \times [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est donc une extension quadratique de $\mathbb{Q}$

Comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, alors $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension 2.
En effet $(1, \sqrt{2})$ en est une base. Attention : ici 1 est un vecteur et $\sqrt{2}$ est un autre vecteur.
Le fait que $\sqrt{2} \notin$ Q se traduit en : ces deux vecteurs sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

C'est comme $\mathbb{C}$ qui est une extension de degré 2 de $\mathbb{R}$ car tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit a + i b. Donc les vecteurs 1 et i forment une base de $\mathbb{C}$, vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Notons $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$.
Alors $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

On peut ainsi construire une suite de corps imbriqués :
Partant de $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ on construit le corps plus gros $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$
$\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ est un nouveau corps qui contient $\mathbb{K}_1$
$= \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$

Théorème de Pierre-Laurent **Wantzel (1837)**
Un nombre réel x est constructible ssi $\exists$ des extensions quadratiques $\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_r$ telles que $x \in \mathbb{K}_r$

Chacune des extensions est quadratique, c'est-à-dire $[\mathbb{K}_{i+1} : \mathbb{K}_i] = 2$.
Autrement dit, chaque extension est une extension quadratique de la précédente :
$\mathbb{K}_{i+1} = \mathbb{K}_i(\sqrt{\delta_i})$ pour un certain $\delta_i \in \mathbb{K}_i$
Donc en partant de $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, les extensions sont : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{\delta_0}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{\delta_0})(\sqrt{\delta_1}) \subset \cdots$

Démonstration

Sens 1 : s'il existe des extensions quadratiques telles que $x \in \mathbb{K}_r$ alors x est constructible
Comme on sait construire les racines carrées des nombres constructibles alors on sait construire tout élément d'une extension quadratique $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{\delta_0})$, puis par récurrence tout élément de $\mathbb{K}_2$, $\mathbb{K}_3$, ...

Sens 2 : si x est constructible alors il existe des extensions quadratiques telles que $x \in \mathbb{K}_r$
Rappelons-nous que les points constructibles sont construits par étapes C_0, C_1, C_2, ...
L'ensemble C_{j+1} s'obtient à partir de C_j en ajoutant les intersections des droites et des cercles que l'on peut tracer à partir de C_j. Nous allons voir que ce passage correspond à une suite d'extensions quadratiques.
Soit $\mathbb{K}$ le plus petit corps contenant les coordonnées des points de C_j. Nous considérons P un point de C_{j+1}.
Ce point P est l'intersection de deux objets : deux droites, une droite et un cercle ou deux cercles.

Distinguons les 3 cas :
• *P est l'intersection de deux droites.*
Ces droites passent par des points de C_j donc elles ont pour équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$
On peut prendre a, b, c, a', b', c' comme étant des éléments de K.
Par exemple une équation de la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$
ce qui donne bien une équation à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Les coordonnées de P sont alors $\left(\frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right)$
Comme $\mathbb{K}$ est un corps alors l'abscisse et l'ordonnée de ce P sont encore dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas il n'y a pas besoin d'extension : le plus petit corps contenant les coordonnées des points de C_j et de P est $\mathbb{K}$.

• *P appartient à l'intersection d'une droite et d'un cercle.*
Notons l'équation de la droite $ax + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ l'équation du cercle.
x_0, y_0, r^2 (mais pas nécessairement r) sont des éléments de $\mathbb{K}$ car les coordonnées du centre et d'un point du cercle sont dans $\mathbb{K}$. Il reste à calculer les intersections de la droite et du cercle.
en posant $\delta = -2x_0a^3by_0 + 2y_0a^2cb - b^2y_0^2a^2 + b^2r^2a^2 + 2a^3x_0c - a^4x_0^2 - a^2c^2 + a^4r^2 \in \mathbb{K}$,
on trouve deux points (x, y), (x', y') avec
$$x = -\frac{b}{a}\frac{1}{a^2+b^2}\left(-x_0ab + y_0a^2 + cb - \frac{c}{b}(a^2+b^2) + \sqrt{\delta}\right) \quad \text{et} \quad y = \frac{c - ax}{b},$$
$$x' = -\frac{b}{a}\frac{1}{a^2+b^2}\left(-x_0ab + y_0a^2 + cb - \frac{c}{b}(a^2+b^2) - \sqrt{\delta}\right) \quad \text{et} \quad y' = \frac{c - ax'}{b}.$$
Les coordonnées sont bien de la forme $\alpha + \beta\sqrt{\delta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et c'est le même $\delta \in \mathbb{K}$ pour x, y, x', y'.
Donc les coordonnées de P sont dans l'extension quadratique $\mathbb{K}(\sqrt{\delta})$.

• *P appartient à l'intersection de deux cercles.*
On trouve aussi deux points (x, y), (x', y') et x, y, x', y' sont aussi de la forme $\alpha + \beta\sqrt{\delta}$ pour un certain $\delta \in \mathbb{K}$ fixé et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Les formules sont plus longues à écrire et on s'en dispensera ici.

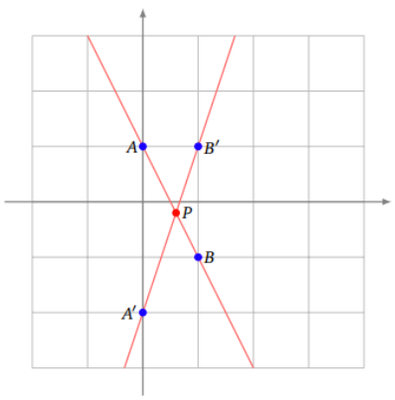
En résumé, dans tous les cas, les coordonnées de P sont dans une extension quadratique du corps $\mathbb{K}$, qui contient les coefficients qui servent à construire P.

On termine la démonstration par une récurrence sur j. Soit $\mathbb{K}$ le plus petit corps contenant les coordonnées des points de C_j. On suppose par récurrence que $\mathbb{K}$ s'obtient par une suite d'extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$.
Soit P_1 un point de C_{j+1}, alors nous venons de voir que le corps $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}(\delta_1)$ correspondant est une extension quadratique de $\mathbb{K}$.

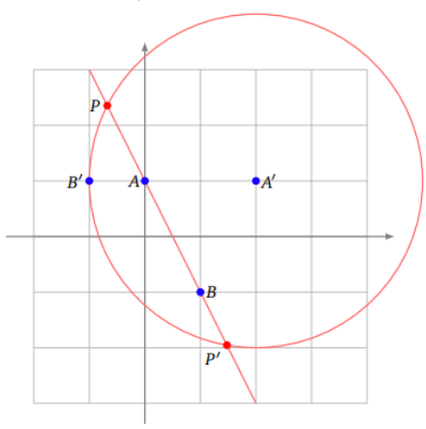
Soit P_2 un autre point, toujours dans C_{j+1}. Plutôt que de considérer l'extension quadratique $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}(\delta_2)$ de $\mathbb{K}$, considérons plutôt $\mathbb{K}'_2 = \mathbb{K}(\delta_1, \delta_2) = \mathbb{K}_1(\delta_2)$ comme une extension au plus quadratique de $\mathbb{K}_1$.
On fait de même pour tous les points de C_{j+1} et on construit une extension $\mathbb{K}(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_p)$ de $\mathbb{K}$ qui correspond à toutes les coordonnées des points de C_{j+1}.
Par construction c'est bien une suite d'extension quadratique de $\mathbb{K}$ donc de $\mathbb{Q}$.

Voici pour des exemples concrets les extensions nécessaires dans chacun des 3 cas de la preuve :

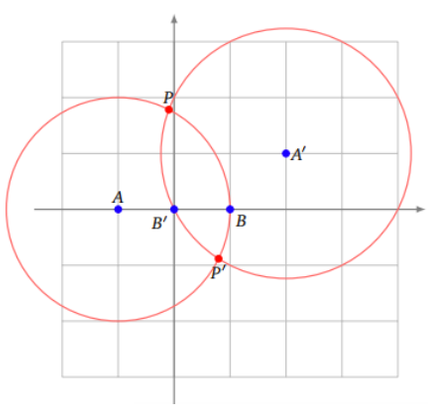
1) P est l'intersection de deux droites (AB) et (A'B')
avec A(0, 1), B(1,−1), A'(0,−2), B'(1, 1)
dont les coordonnées sont dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
Les équations sont 2x+ y = 1 et 3x− y = 2
Le point d'intersection P a pour coordonnées (3/5,-1/5)
Donc l'abscisse et l'ordonnée sont dans $\mathbb{Q}$.
Il n'y a pas besoin d'étendre le corps.



2) P et P' sont les intersections d'une droite et d'un cercle
La droite passe par A(0, 1) et B(1,−1)
Le cercle de centre A'(2, 1) passe par le point B'(−1, 1)
et est donc de rayon 3.
Les équations sont $2x + y = 1$ et $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$
Les deux solutions sont les points :
$\left(\frac{1}{5}\left(2-\sqrt{29}\right), \frac{1}{5}\left(1+2\sqrt{29}\right)\right), \left(\frac{1}{5}\left(2+\sqrt{29}\right), \frac{1}{5}\left(1-2\sqrt{29}\right)\right)$
Pour $\delta = 29 \in \mathbb{Q}$ les coordonnées des points d'intersection
sont de la forme $\alpha + \beta\sqrt{\delta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{Q})$,
c'est-à-dire appartiennent à l'extension quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{29})$.



3) P et P' sont les intersections de deux cercles
Soient les cercles $C((-1, 0), 2)$ et $C((2, 1), \sqrt{5})$
Les équations sont $(x+1)^2 + y^2 = 4$ et $(x-2)^2+(y-1)^2 = 5$
Les deux points d'intersection sont :
$\left(\frac{1}{20}\left(7-\sqrt{79}\right), \frac{3}{20}\left(3+\sqrt{79}\right)\right), \left(\frac{1}{20}\left(7+\sqrt{79}\right), \frac{3}{20}\left(3-\sqrt{79}\right)\right)$
Pour $\delta = 79 \in \mathbb{Q}$, les coordonnées des points d'intersection
sont de la forme $\alpha + \beta\sqrt{\delta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{Q})$,
c'est-à-dire appartiennent à l'extension quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{79})$.



Corollaire du Théorème de Wantzel

Tout nombre réel constructible est un nombre algébrique

c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$.

De plus, le degré algébrique de x est de la forme 2^n, $n \geq 0$

c'est-à-dire que le plus petit degré, parmi tous les degrés des polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ vérifiant $P(x) = 0$ est une puissance de 2.

Démonstration :

Soit x un nombre constructible.

Par le théorème de Wantzel, il existe des extensions quadratiques $\mathbb{Q} = \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_r$ telles que $x \in \mathbb{K}_r$.

Donc x appartient à une extension de $\mathbb{Q}$ de degré fini. Ainsi, x est un nombre algébrique.

On sait de plus que $[\mathbb{K}_{i+1} : \mathbb{K}_i] = 2$, donc nous avons $[\mathbb{K}_r : \mathbb{Q}] = 2^r$

Il nous reste à en déduire le degré algébrique $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$

Comme $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{K}_r$, alors : $[\mathbb{K}_r : \mathbb{Q}(x)] \times [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{K}_r : \mathbb{Q}] = 2^r$

Donc $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ divise 2^r et est donc de la forme 2^n.

LES 3 CELÈBRES PROBLÈMES DE CONSTRUCTION DE L'ANTIQUITÉ

Voici 3 problèmes qui occupèrent les mathématiciens pendant 20 siècles

1. TRISECTION DE L'ANGLE

La trisection c'est la division d'un angle en 3 angles égaux en utilisant uniquement une règle sans graduation et un compas. François Viète a prouvé au XVIème siècle que c'est IMPOSSIBLE - à part pour quelques cas particuliers comme 90°, 45°, 135° ou 108° (*cf* pentagone).

Il prouve que la trisection est équivalente à la résolution d'équations du troisième degré qui n'ont pas de racines réelles et donc ne sont pas constructibles à la règle et au compas.

La trisection devient possible avec une règle marquée et un compas (*cf* Neusis)

2. LA DUPLICATION DU CUBE

Pour un cube donné, quel est le côté du cube de volume double ?

Connu sous le nom du problème de l'autel d'Apollon :

Grèce, 430 av. J.-C. Les habitants de l'île de Délos souffrent d'une épidémie de peste. L'oracle leur recommande de doubler le volume de leur autel cubique, dédié à Apollon.

Toutes les tentatives furent des échecs. Et, la peste redoublait. Alors, ils allèrent chercher les conseils de Platon. Platon ne trouvant pas la solution prétendit qu'Apollon n'avait pas besoin d'un nouvel autel, mais que cette demande signifiait plutôt qu'il fallait s'intéresser à la géométrie.

Il a fallu attendre Wantzel pour démontrer que ce problème n'a pas de solution.

Le rapport entre les côtés des deux cubes valant $\sqrt[3]{2}$, cela revient à déterminer si $\sqrt[3]{2}$ est constructible.

$\sqrt[3]{2}$ est une racine du polynôme $P(X) = X^3 - 2$ Ce polynôme est unitaire et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$

Donc $\sqrt[3]{2}$ est un nombre algébrique de degré 3. Son degré algébrique n'est pas de la forme 2^n.

$\sqrt[3]{2}$ n'est donc pas un nombre constructible et

la duplication du cube ne peut pas s'effectuer à la règle et au compas.

3. QUADRATURE DU CERCLE ET TRANSCENDANCE

Le but était de construire un carré et un cercle de même périmètre (ou de même aire) avec règle et compas.

A commencer par les Grecs, on s'y est très longtemps essayé.

La découverte (pas la preuve) que π n'est pas rationnel est ancienne et pouvait être dangereuse : un disciple de Pythagore aurait été assassiné pour étouffer sa découverte.

Il a fallu attendre Ferdinand von Lindemann en 1882 pour *montrer* que π est transcendant : en plus d'être irrationnel, il ne peut satisfaire aucune équation algébrique à coefficients rationnels. Il n'est qu'une suite infinie de termes. π n'étant pas constructible, $\sqrt{\pi}$ ne l'est pas non plus et

la quadrature du cercle ne peut pas s'effectuer à la règle et au compas.

CONSTRUCTION DES POLYGONES RÉGULIERS
KONSTRUKTION REGULÄRER POLYGONE

Ein reguläres Polygon oder Isogon ist ein n-eck das sowohl gleichseitig als auch gleichwinklig ist

Die klassischen Konstruktionswerkzeuge nach Euklid (ca. 300 v. Chr.) sind Zirkel und Lineal ohne Messfunktion.

Damit können Kreise um einen Mittelpunkt durch einen zweiten Punkt, Geraden, Strahlen und Strecken durch zwei Punkte, Schnittpunkte zweier Kreise, zweier Geraden oder zwischen Kreis und Gerade konstruiert werden.

Mit Wantzel wissen wir, dass die Lösungen derartiger Systeme, sofern diese existieren, sind endlich lange Terme, die rationale Zahlen, evtl. verknüpft durch die vier Grundrechenarten und Quadratwurzeln sowie Verschachtelungen davon enthalten.

Bereits seit Euklid sind Konstruktionen mit Zirkel und Lineal für das reguläre 3-, 4- und 5-Eck bekannt.

Mit Winkelhalbierenden erzeugt man die "Familien" der regulären 3-, 6-, 12-, 24-, ...-Ecke;
4-, 8-, 16-, ...-Ecke; und
5-, 10-, 20-, ...-Ecke.

Gauss (CS en 1796) et Wantzel (CN en 1837) ont montré :

Un polygone régulier à n cotés n'est constructible avec une règle et un compas que si

n est de la forme $\mathbf{2^r p_1 p_2 \dots p_k}$ où les p_i sont des nombres premiers de Fermat *distincts*. (r, i entiers)

Les nombres premiers de Fermat sont les nombres premiers pouvant s'écrivent sous la forme $2^{2^i} + 1$
Les seuls connus sont **3, 5, 17, 257 et 65537** $p_0 = 3$ $p_1 = 5$ $p_2 = 17$ $p_3 = 257$

La construction est **impossible** pour 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33… cotés.

La construction est **possible** pour 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51… cotés.

On va présenter dans cette section :
- Plusieurs façons de construire le pentagone
- Les liens au triangle d'or et au nombre d'or
- Le nonagone et l'angle de 20/40/70 degrés
- Les combinaisons pour construire le pentadécagone
- Un aperçu de la construction de l'heptadécagone (*)
- La démonstration du théorème de Gauss-Wantzel (**)

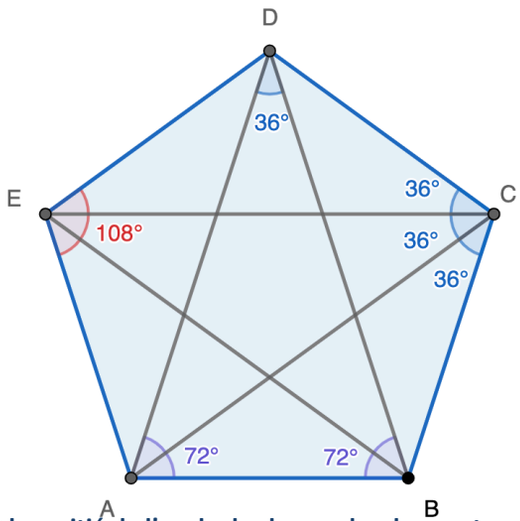
(*) Un ordre de grandeur : les explications pour construire le polygone à 17 cotés font une dizaine de pages, celles pour construire le polygone à 257 cotés font une cinquantaine de pages, celles pour le polygone à 65537 cotés prennent plusieurs centaines de pages. On passera.

(**) Si, si. C'est certes de l'algèbre de haut niveau, mais quel ne sera pas votre émoi de découvrir ce lien entre l'algèbre et la géométrie ! J'espère par la beauté de ce théorème vous motivera à étudier l'algèbre, une branche des mathématiques souvent inconnue et ardue pour les nouveaux étudiants, mais qui sera aussi certainement une clef de votre réussite académique.

Beaucoup de recherches ont été faites dans les siècles passés sur les constructions approximatives de différents polygones. Avec les logiciels de CAO, l'utilité pratique aujourd'hui des constructions approximatives me semble avoir disparue. Ça n'a pas de beauté théorique et pas d'application pratique que je puisse discerner : on en donnera juste un exemple avec le nonagone.

PROPRIÉTES DU PENTAGONE RÉGULIER - TRIANGLE D'OR ET NOMBRE D'OR

La somme des angles du pentagone est (5-2).180 = 540 °
L'angle de chaque sommet est donc 540 / 5 = 108°

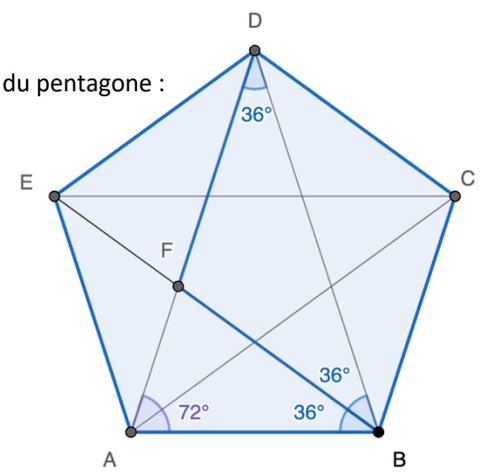


AED est isocèle et *AED* = 108° donc *DAE* = *EDA* = (180-108)/2 = 36°
BAE est isocèle et *BAE* = 108° donc *EBA* = *AEB* = (180-108)/2 = 36°
EDC est isocèle et *EDC* = 108° donc *ECD* = *DCE* = (180-108)/2 = 36°
AED = *AEB* + *BEC* + *CED*
108 = 36 + *BEC* + 36
BEC = 108 - 2.36 = 36
Similairement, l'angle de chaque pointe du pentagramme (l'étoile à 5 branches) est un angle de 36 °

et *AEB* = *BEC* = *CED* = 36 °
Les diagonales du pentagone trisèquent donc chaque angle au sommet en trois angles de 108 / 3 = 36°

Un triangle d'or est un triangle isocèle tel que l'angle au sommet α ait la moitié de l'angle de chacun des deux autres sommets : $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180°$ $\alpha = 36°$
Dans un triangle d'or, l'angle au sommet vaut 36° et les deux angles à la base valent 72°

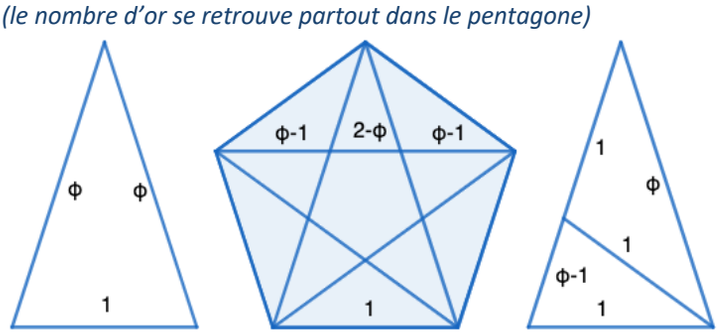
Ainsi le pentagramme est constitué de 3 triangles d'or : ADB, BEC et ECA.



On introduit maintenant le point F, intersection de AD et BE.
Les angles à la base de ces triangles d'or sont bissectés par les diagonales du pentagone :
FBA = *DBA* / 2 = 36°
BAF est donc un triangle d'or, il est isocèle et BF = AB

Par ailleurs, comme *DBF* = 36° et *FDB* = 36°, FDB est isocèle et BF = FD

Si on considère le pentagone unitaire de côté AB = 1 :
et que l'on note AD = BD = **φ = le nombre d'or**
AD = AF + FD = AF + 1 alors AF = φ - 1
On a alors les angles et longueurs suivants :
(le nombre d'or se retrouve partout dans le pentagone)



Théorème de la bissectrice dans ABD :
la bissectrice BF de *DBA* découpe le côté opposé AD dans le rapport des cotés adjacents
BA / BD = AF / FD $1 / \varphi = (\varphi - 1) / 1$ **$1 / \varphi = \varphi - 1$**
En multipliant par φ : $1 = \varphi^2 - \varphi$

Le nombre d'or φ est la solution de **$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$**

La seule solution positive est $$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$\varphi = 1{,}618\ldots$

La longueur des diagonales d'un pentagone régulier de côté 1 vaut φ

Ou plus généralement : les diagonales d'un pentagone régulier mesurent φ fois la longueur du côté.

CONSTRUCTION DU PENTAGONE RÉGULIER

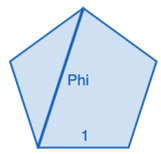
CONSTRUCTION 1

Objectif : construction du pentagone de côté de longueur 1

Donnée initiale : segment P1A de longueur 1.

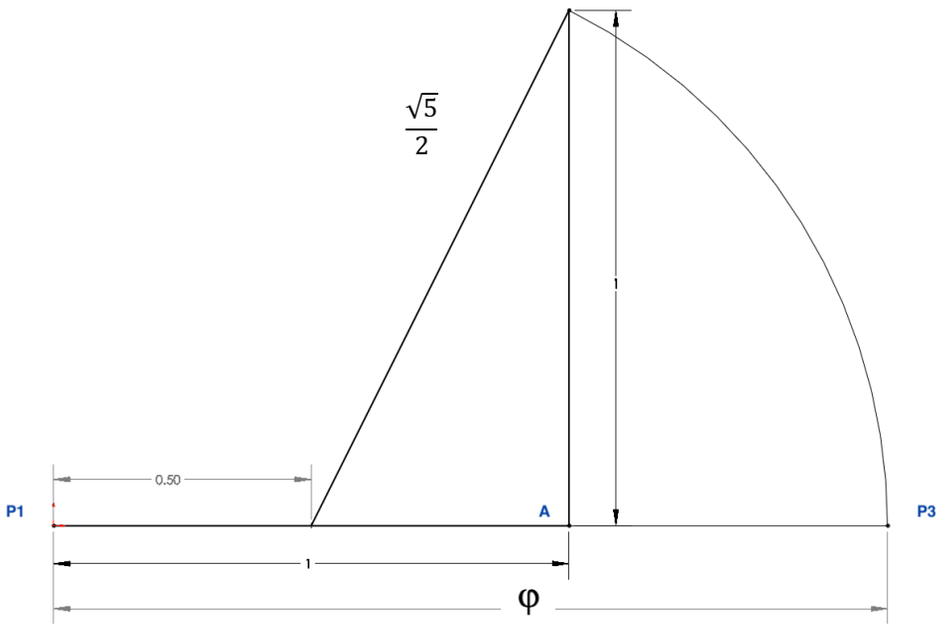
Propriété utilisée : la longueur des diagonales vaut φ

METHODE PAPA-EUCLIDE



Étape 1 Construction de φ

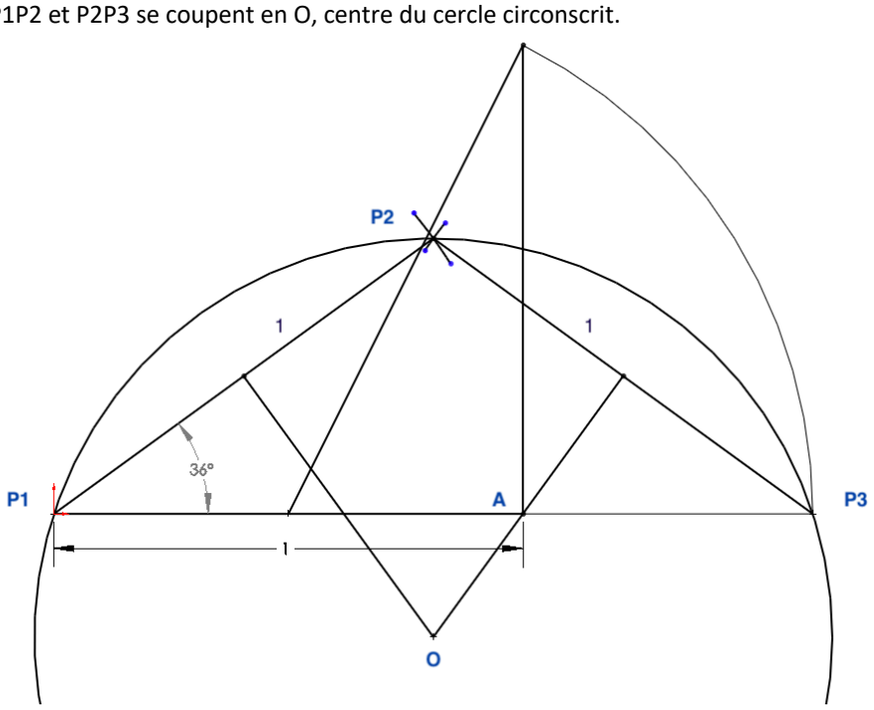
Les diagonales du pentagone de côté 1 étant de longueur φ on a obtenu P3.



Étape 2 Obtention de P2 et du centre du cercle circonscrit

P2 est le sommet du triangle isocèle P1P2P3 : il est l'intersection des cercles C (P1, 1) et C (P3, 1).

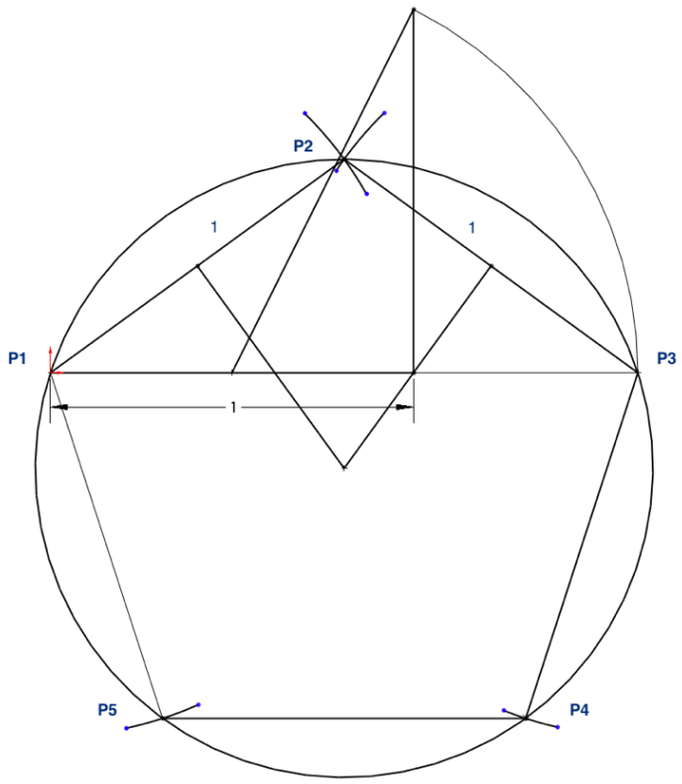
Les médiatrices de P1P2 et P2P3 se coupent en O, centre du cercle circonscrit.



Étape 3 Dessin du pentagone

L' intersection des cercles C (P1, 1) et C (P3, 1) de la 2ème étape avec le cercle circonscrit donne les points P5 et P4 respectivement.

P1P2P3P4P5 est le pentagone recherché.



Soit q un nombre constructible quelconque.

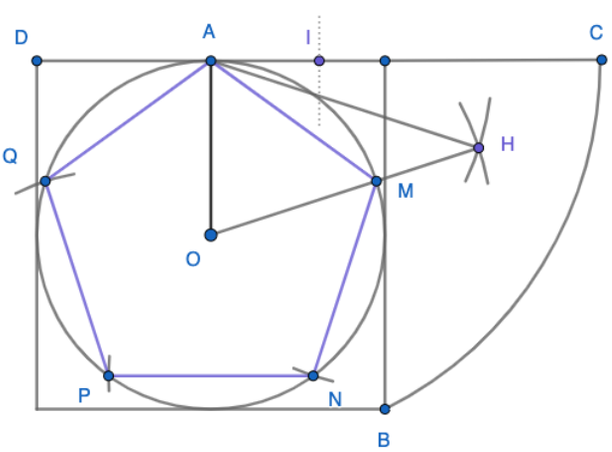
- **En traçant les rayons OP_i et le cercle de diamètre q on obtient un pentagone inscrit dans le cercle de diamètre q.**
- **En reprenant cette méthode en construisant A tel que $P_1A = q$ on peut construire un pentagone de côté égal à n'importe quel nombre constructible q.**

CONSTRUCTION 2

Objectif : construction du pentagone inscrit dans le cercle de rayon 1

Donnée initiale : cercle de centre O et de rayon OA = 1

Propriété utilisée : AOH est un triangle d'or de base 1, de côté $1/\varphi = \varphi - 1$

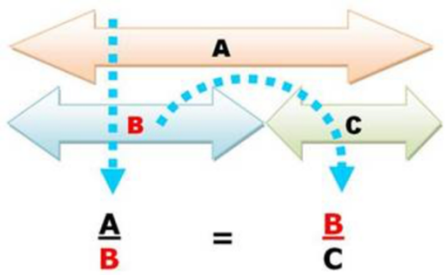


On trace le carré de côté 2 circonscrit au cercle.
AB = $\sqrt{5}$ est reporté en AC.
DC = $1 + \sqrt{5}$
On trace la médiatrice de DC
pour obtenir I le milieu de [DC]
Alors DI = ½ $(1 + \sqrt{5}) = \varphi$
On reporte DI au compas en A et O pour obtenir H.
Alors AH = OH = φ et OA = 1 :
le triangle isocèle EAH est un triangle d'or.
Donc $OAH = 2\pi/5 = 72$
OH coupe le cercle en M.
AM est un côté du pentagone
qu'on reporte en N, P et Q.

Complément sur le nombre d'or

Le nombre d'or est aussi appelé divine proportion.

Un segment de longueur A est coupé en deux segments de longueurs B et C selon la divine proportion si « le long est au moyen ce que le moyen est au petit ».



C'est-à-dire si A/B = B/C

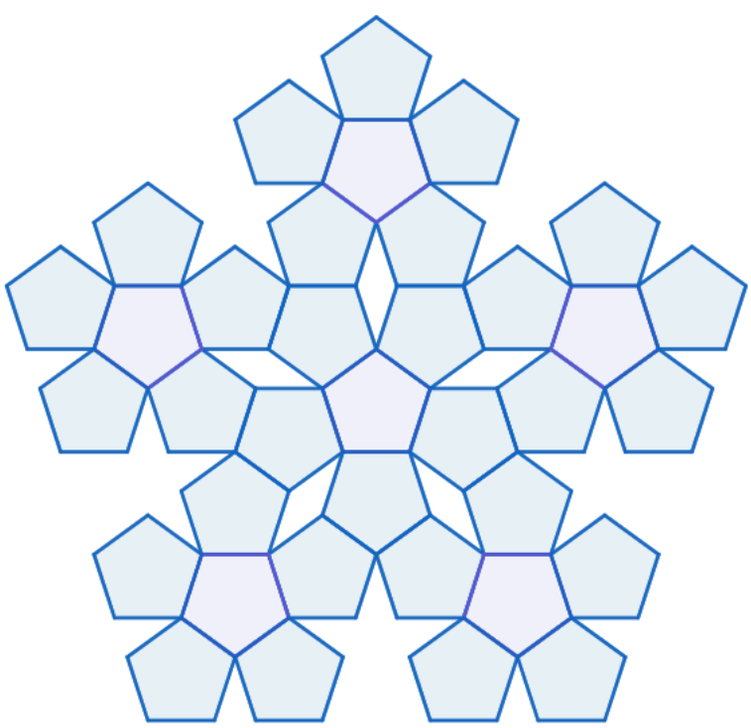
Comme A = B + C on a :

(B+C)/B = B/C
(B+C).C = B^2
BC + C^2 = B^2
B^2 - BC - C^2 = 0

Pour C = 1 on a
B^2 - B - 1 = 0
On a retrouvé l'équation de φ.

Cette proportion est utilisée dans l'architecture antique grecque – par exemple dans le Parthénon d'Athènes.
… mais aussi dans notre maison – par exemple la proportion de la largeur et de la hauteur de la grande ouverture entre salon et salle à manger est φ.

Pour finir le thème du pentagone en beauté, voici le pentagone fractal de Dürer



PENTADECAGONE – 15-Ecke

15 = 3 x 5 ; 3 et 5 sont des nombres premiers de Fermat ; donc le pentadécagone est constructible.
Comment procéder ?

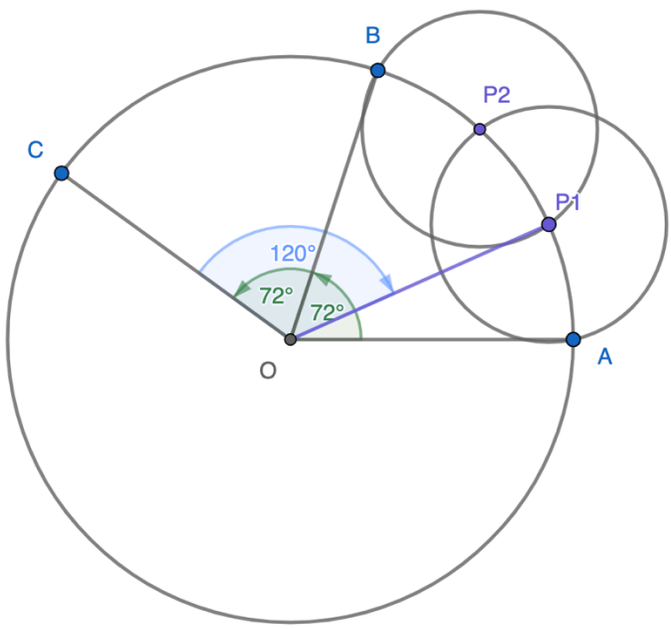
Version débutants

Der reguläre 15-Ecke läßt sich konstruieren, indem *man merke*: 1/5 + 1/5 - 1/3 = 1/15

Man zeichne den Bestimmungswinkel *AOB* des regulären 5-Ecks (360/5 = 72°) im mathematisch positiven Drehsinn und füge einen weiteren Winkel mit dieser Größe an *BOC*.

Man füge in entgegengesetztem Drehsinn den Bestimmungswinkel des regulären 3-Ecks (360/3 = 120°) P_1OC an.

Der Gesamtwinkel AOP_1 = 2.72 - 120 = 24° ist der Bestimmungswinkel des regulären 15-Ecks (360/15 = 24°).
Man zeichnet anschließend 15 Zirkeln um die Punkte P_2, P_3 … bis P_{15} zu erhalten.



Ou alors : 1/3 – 1/5 = 2/15 Divisé par une bissectrice = 1/15
Ou alors : 1/6 – 1/5 = 1/30 Doublé = 1/15

Version pros

Soient n et m deux entiers premiers entre eux tels que les polygones réguliers à n côtés et m côtés soient tous les deux constructibles.
D'après le théorème de **Bézout**, il existe deux entiers u et v tels que u.n + v.m = 1
en multipliant par 2π 2π.u.n +2π.v.m = 2π
et en divisant pas nm 2π.u/m + 2π.v/n = 2π/nm
À partir des angles 2π/n et 2π/m, on peut donc construire l'angle de mesure 2π/nm = v.2π/n + u.2π/m en reportant au compas v fois l'angle 2π/n et u fois l'angle 2π/n – dans un sens trigonométrique pour les coefficients de Bézout v ou u positifs, dans le sens contraire pour les coefficients négatifs.
On peut donc ainsi construire systématiquement le polygone régulier à nm côtés.

Angles de 12, 6 et 3 degrés

Triangle équilatéral – pentagone : 1/6 – 1/5 = 1/30 C'est l'angle de 12°.
Bissectrice → 6° Bissectrice → 3°

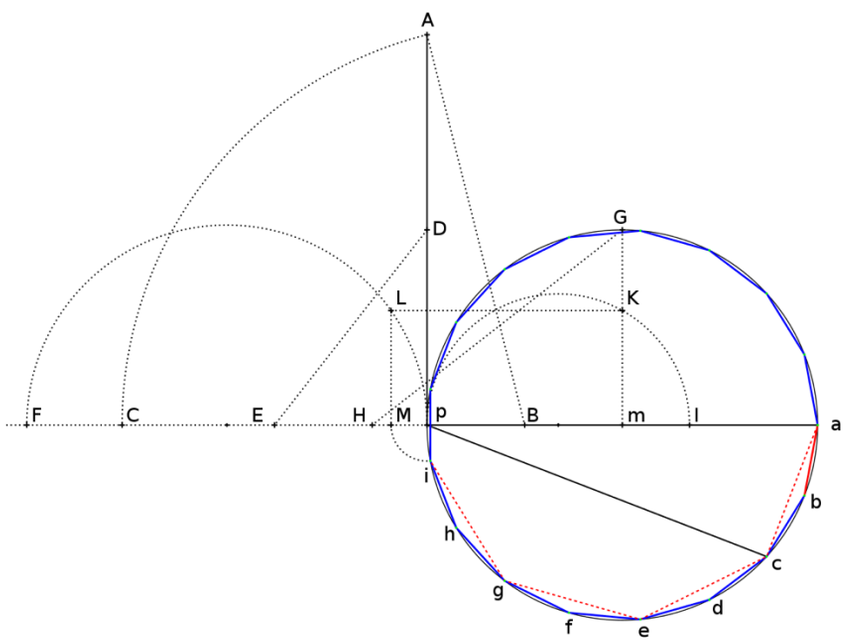
HEPTADECAGONE – 17-Ecke

Gauss a montré en 1796 que

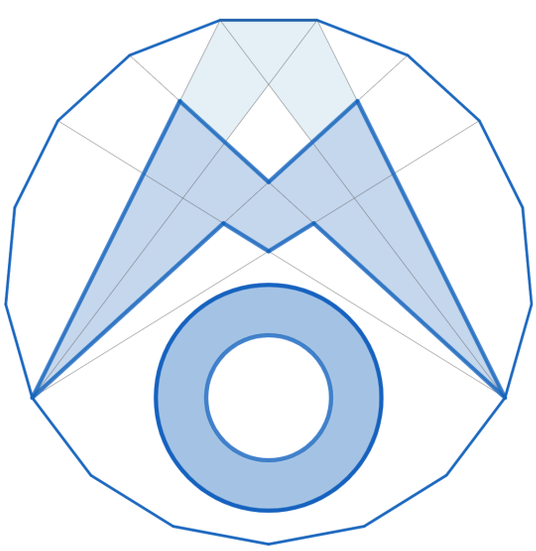
$$\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2\left(17-\sqrt{17}\right)}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2\left(17-\sqrt{17}\right)}-2\sqrt{2\left(17+\sqrt{17}\right)}}\right)$$

A partir de là on voit que l'affaire est pliée :
ce cosinus est une combinaison de sommes, soustractions et racines d'entiers, encore des racines, le tout terminé par une division.
C'est peut-être un peu long mais on a vu en détail que tout ceci est éminemment constructible.
On a aussi vu qu'ayant le cosinus de l'angle π/17 on peut le projeter sur le cercle unité pour obtenir le premier sommet de l'heptadécagone.
Par rapport d'angle on obtient enfin tous les autres sommets.

Plusieurs constructions habiles ont été inventées – en particulier en utilisant cos (3π/17) qui est plus simple, représentée ci-dessous.
Mais soyons honnêtes : l'intérêt de la chose est dans la possibilité théorique de la constructibilité, pas dans l'implémentation pratique qui sera faite en un clin d'œil et plus précisément avec GeoGebra ou Solidworks.



L'idée derrière le logo des Mathematik Olympiaden est de dessiner un M superposé à un compas avec les cordes d'un heptadécagone régulier :



THÉORÈME DE GAUSS-WANTZEL

Définissons à nouveau formellement la notion d'objet constructible à la règle et au compas.
Pour une partie $X \subseteq \mathbb{R}^2$, on définit :
• $\gamma_1(X) = \{(AB) : A, B \in X\}$ l'ensemble des droites passant par deux points distincts de X.
• $\gamma_2(X) = \{C(A, |AB|) : A, B \in X\}$ l'ensemble des cercles dont un rayon a pour extrémité deux points distincts de X.
On note $\gamma(X) = \gamma_1(X) \cup \gamma_2(X)$, et on dit que
un point $M \in \mathbb{R}^2$ est constructible en un pas à partir de X s'il existe $u, v \in \gamma(X)$ distincts tels que $M \in u \cap v$.

On définit par récurrence l'ensemble B_n des points constructibles en n étapes à partir de A = (0, 0) et B = (1, 0).
On a donc $B_0 = \{A, B\}$, et B_{n+1} est l'ensemble des points de *P* constructibles à partir de B_n en un pas.
On dira que $M \in \mathbb{R}^2$ est constructible si $M \in \cup B_n$ pour $n \in \mathbb{N}$
$x \in \mathbb{R}$ est constructible si (x, 0) est constructible.
On peut alors montrer que l'ensemble des nombres réels constructibles forme un corps dont $\mathbb{Q}$ fait partie.

Pour pouvoir construire le polygone régulier à n côtés, il faut et il suffit de savoir construire
son sommet C d'affixe $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$
En effet, si on est capable d'obtenir ce point à partir de A et B, il suffit de répéter la suite d'opérations à partir de A et C pour obtenir le sommet suivant du polygone d'affixe ω_n^2 (ou simplement par report d'angle au compas dans le cercle unitaire). En répétant cette opération n fois, on construit tous les sommets du polygone.
Le polygone régulier à n côtés est donc constructible si et seulement si ω_n est constructible.
On dira que $z \in \mathbb{C}$ est constructible si le point d'affixe z l'est.

Intuitivement, les nombres constructibles en un pas à partir d'un ensemble X sont solutions d'équations de degré au plus deux puisqu'ils correspondent à l'intersection d'une droite ou d'un cercle avec une autre droite ou un cercle. Wantzel formalise cette intuition à l'aide de la notion de tour d'extension quadratique qu'on définit maintenant.

Une suite finie de corps $\mathbb{K}_0, \ldots, \mathbb{K}_p$ est une **tour d'extension quadratique** si $\mathbb{K}_{i+1}$ est une extension finie de degré 2 de $\mathbb{K}_i$ pour tout $i \in [0, p-1]$.

Théorème de Wantzel : un nombre $t \in \mathbb{R}$ est constructible si et seulement si il existe $\mathbb{K}_0, \ldots, \mathbb{K}_p$ une tour d'extension quadratique telle que $t \in \mathbb{K}_p$ et $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$.

Comme $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$ de degré 2, on en déduit la version complexe du théorème de Wantzel :

Théorème : Un nombre $z \in \mathbb{C}$ est constructible si et seulement si il existe $\mathbb{K}_0, \ldots, \mathbb{K}_p$ une tour d'extension quadratique telle que $z \in \mathbb{K}_p$ et $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$.

Corollaire : Si $x \in \mathbb{C}$ est constructible, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2^n$
Démonstration :
Supposons que x soit constructible : il existe une tour d'extension quadratique $\mathbb{K}_0, \ldots, \mathbb{K}_p$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $x \in \mathbb{K}_p$.
Comme $\mathbb{K}_p$ contient $\mathbb{Q}$ et x, alors $\mathbb{K}_p$ contient aussi $\mathbb{Q}(x)$.
Ainsi $\mathbb{Q}(x)$ est un sous-corps de $\mathbb{K}_p$ donc son degré sur $\mathbb{Q}$ divise celui de $\mathbb{K}_p$ sur $\mathbb{Q}$.
D'après le théorème des bases télescopiques, $\mathbb{K}_p$ est de degré 2^p sur $\mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}(x)$ est de degré 2^n sur $\mathbb{Q}$ avec $n \leq p$.

Rappels : pour $n \in \mathbb{N}^*$ le **polynôme cyclotomique F_n** est défini par

$$\Phi_n(X) \overset{def}{=} \prod_{0 \leq k < n, k \wedge n = 1} \left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n} \right) \right)$$

L'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ d'un entier n est définie comme le nombre d'entiers k tels que $0 \leq k < n$ et $k \wedge n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $F_n \in \mathbb{Q}[X]$ est de degré $\varphi(n)$ et est irréductible sur $\mathbb{Q}$. De plus $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$

Théorème	**Soit p un nombre premier impair et a ∈ ℕ*. Le polygone régulier à p^a côtés est constructible si et seulement si a = 1 et s'il existe n ∈ ℕ tel que p = 2^{2^n} + 1**

Démonstration
Supposons que le polygone régulier à m = p^a côtés soit constructible, donc $\omega_m = e^{2i\pi/m}$ est constructible.
Or ω_m est racine du polynôme cyclotomique F_m, qui est unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$.
Ainsi, ω_m est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré $\deg(F_m) = \varphi(m) = p^{a-1}(p-1)$.
Comme ω_m est constructible, le théorème de Wantzel implique que $p^{a-1}(p-1)$ est une puissance de 2.
On a donc nécessairement a = 1, et p − 1 est une puissance de 2.

Supposons qu'il existe n ≥ 1 tel que $p = 1 + 2^n$. On pose $\omega = e^{2i\pi/p}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\omega)$ le corps cyclotomique. Là aussi, le polynôme minimal de ω est F_p d'où $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = p - 1 = 2^n$ et donc une base de $\mathbb{K}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est $B = \{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}\}$. Pour construire la tour d'extension quadratique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{K}$ de longueur n, on s'intéresse à $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ l'ensemble des automorphismes de corps de $\mathbb{K}$ qui sont $\mathbb{Q}$-linéaires : on commence par montrer que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, puis on construit des sous-ensembles de $\mathbb{K}$ invariants par des sous-groupes de G qui nous fourniront les corps intermédiaires.

Un élément g ∈ G est complétement déterminé par l'image de ω.
Comme F_p annule ω, on a $F_p(g(\omega)) = g(F_p(\omega)) = g(0) = 0$ donc l'image de ω par g est encore une racine de F_p: il existe un unique $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $g(\omega) = \omega^k$. De plus, comme ω est une racine primitive, on a nécessairement $k \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.
On a ainsi défini une application injective $\varphi : G \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ qui est un morphisme puisque
$g \circ h(\omega) = g(\omega^{\varphi(h)}) = (g(\omega))^{\varphi(h)} = \omega^{\varphi(h)\varphi(g)}$

Montrons que φ est surjective : soit $k \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ et construisons $g \in G$ tel que $g(\omega) = \omega^k$. Remarquons qu'il suffit de définir g sur les éléments de B pour définir g sur $\mathbb{K}$ tout entier par $\mathbb{Q}$-linéarité, qui sera donc compatible avec l'addition et la multiplication par un scalaire.
On définit donc l'application linéaire $g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ par son image sur la base B :
$g(\omega^i) = \omega^{ik}$ pour tout $i \in [1, p-1]$.
C'est le seul candidat pour être un automorphisme de corps puisqu'on doit avoir $g(\omega^i) = g(\omega)^i$.
Montrons maintenant qu'il s'agit bien d'un automorphisme du corps $\mathbb{K}$. Dans la base B, la décomposition de 1 est donnée par $1 = \sum_{j=1}^{p-1} -\omega^j$ et donc la $\mathbb{Q}$-linéarité de g permet de montrer que

$$g(1) = \sum_{j=1}^{p-1} g(-\omega^j) = \sum_{j=1}^{p-1} -\omega^{kj} = 1$$

De même, pour $i \geq p$, on a $g(\omega^i) = g(\omega^{i \bmod p}) = \omega^{k(i \bmod p)} = \omega^{ki}$. Ainsi, on a $g(\omega^i) = \omega^{ki}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il reste donc à vérifier la compatibilité de g avec la multiplication et, quitte à développer par $\mathbb{Q}$-linéarité, il suffit de considérer le cas de la multiplication de deux éléments de la base.
Pour $i, j \in [1, p-1]$, on a bien $g(\omega^i \omega^j) = g(\omega^{i+j}) = \omega^{k(i+j)} = \omega^{ki}\,\omega^{kj} = g(\omega^i)g(\omega^j)$ et donc g est bien un automorphisme du corps $\mathbb{K}$ tel que $g(\omega) = \omega^k$.
On a donc montré que l'application $\varphi : G \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, qui à $g \in G$ associe l'unique $k \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ tel que $g(\omega) = \omega^k$, est un isomorphisme. Comme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique, alors G l'est également : il existe un élément $g \in G$ d'ordre p − 1, et donc $B = \{\omega, g(\omega), g^2(\omega), \dots, g^{p-2}(\omega)\}$ est une base. On définit alors les ensembles $\mathbb{K}_i = \{z \in \mathbb{K} : g^{2^i}(z) = z\}$ pour $i \in [0, n]$, qui sont des sous-corps de $\mathbb{K}$ tels que $\mathbb{K}_i \subseteq \mathbb{K}_{i+1}$, et $\mathbb{K}_n = K$ car $g^{2^n} = \mathrm{Id}$. Nous allons montrer que les $\mathbb{K}_i$ forment la tour d'extension quadratique souhaitée. Pour cela, nous allons voir l'application de g à $z \in \mathbb{K}$ comme une permutation circulaire des coordonnées de z dans la base B. En effet, décomposons z dans la base B : $z = \sum_{i=0}^{p-2} z_i g^i(\omega)$ où $z_i \in \mathbb{Q}$ pour tout i. On a alors

$$g(z) = \sum_{i=0}^{p-2} z_i g^{i+1}(\omega) = \sum_{i=1}^{p-2} z_{i-1} g^i(\omega) + z_{p-2}\,\omega$$

On peut donc écrire $g\cdot(z_0, z_1, \dots, z_{p-2}) = (z_{p-2}, z_0, \dots, z_{p-1})$.
De cette manière, on a $g^a(z) = z$ si et seulement si $z_{i+a} = z_i$ pour tout i, où les indices sont pris modulo p.
En particulier, si a est premier avec p−1, alors il engendre $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, +)$ donc on a $g^a(z) = z$ ssi $z_i = z_0$ pour tout i. Dans ce cas, on aurait $z = z_0 \sum_{i=0}^{p-2} g^i(\omega) = z_0 \sum_{i=1}^{p-1} \omega^i = -z_0 \in \mathbb{Q}$ d'où $g^a(z) = z$ si et seulement si $z \in \mathbb{Q}$.
Le cas a = 1 assure que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, et cette remarque motive la définition des $\mathbb{K}_i$.
Pour $i \in [0, n]$, on a $z \in \mathbb{K}_i$ si et seulement si $z_{j+2^i} = z_j$ pour tout j.
Notons e l'élément de K dont la décomposition dans la base B est

$$e = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^i-1}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^i-1}, \dots) = \sum_{j=0}^{2^{n-i}-1} g^{j\cdot 2^i}(\omega)$$

L'ensemble $C = \{e, g(e), \dots, g^{2^i-1}(e)\}$ est une famille linéairement indépendante.
On a $z \in \mathbb{K}_i$ ssi $z_{j+2^i} = z_j$ pour tout j, ce qui équivaut à dire que z se décompose en $z = \sum_{j=0}^{2^i-1} z_j g^j(e)$
On a donc $\mathbb{K}_i = \langle C \rangle$, d'où $[\mathbb{K}_i : \mathbb{Q}] = 2^i$
Et comme $\mathbb{K}_i \subseteq \mathbb{K}_{i+1}$, le théorème de la base télescopique nous donne l'égalité $[\mathbb{K}i+1 : \mathbb{K}i] = \frac{[\mathbb{K}i+1 : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{K}i : \mathbb{Q}]} = 2$
On a donc une tour d'extension quadratique de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$, d'où ω est constructible par le théorème de Wantzel. *QED*

Les nombres premiers de la forme $F_k = 2^{2^k} + 1$ s'appelle les **nombres premiers de Fermat**.

Ce dernier conjectura que tous les nombres F_k étaient premiers, en s'appuyant sur le fait que
$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$ sont effectivement premiers.
Néanmoins la conjecture est prouvée fausse par Euler en 1732 qui montre que F5 est composé.
On a prouvé depuis que les nombres suivants jusqu'à F32 sont aussi composés, mais on ne sait pas encore si les nombres de Fermat F33 et suivants sont premiers ou non.

Revenons-en aux polygones en prouvant les 2 théorèmes suivants qui achèvent la classification des polynômes réguliers constructibles.

Soit $n \geq 3$, alors P_n est constructible ssi P_{2n} est constructible.
Si le polygone régulier à n côtés est constructible, alors le polygone régulier à 2n côtés est aussi constructible :
- on trouve le centre du polygone en construisant les médiatrices des côtés
- puis on construit la bissectrice de l'angle de mesure $2\pi/n$ du premier polygone, la construction de n'importe quelle bissectrice se faisant à la règle et au compas.

Réciproquement, si P_{2n} est construit, on prend un point sur deux et on obtient les sommets de P_n.

Soit $n, m \geq 3$ premiers entre eux, alors P_{nm} est constructible ssi P_n et P_m le sont
Soient n et m deux entiers premiers entre eux tels que les polygones réguliers à n côtés et m côtés soient tous les deux constructibles.
D'après le théorème de Bezout, il existe deux entiers u et v tels que $u.n + v.m = 1$
en multipliant par 2π $2\pi.u.n + 2\pi.v.m = 2\pi$
et en divisant pas nm $2\pi.u/m + 2\pi.v/n = 2\pi/nm$
À partir des angles $2\pi/n$ et $2\pi/m$, on peut donc construire l'angle de mesure $2\pi/nm = v.2\pi/n + u.2\pi/m$ en reportant au compas v fois l'angle $2\pi/n$ et u fois l'angle $2\pi/n$ – dans un sens trigonométrique pour les coefficients de Bézout v ou u positifs, dans le sens contraire pour les coefficients négatifs.
On peut donc ainsi construire le polygone régulier à nm côtés.

Réciproquement, si P_{nm} est construit, on ignore m-1 sommets consécutifs sur m pour obtenir P_n et vice versa on ignore n-1 sommets consécutifs sur n pour obtenir P_m.

Ainsi :

THÉORÈME DE GAUSS-WANTZEL
Un polygone régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et de nombres premiers de Fermat distincts.

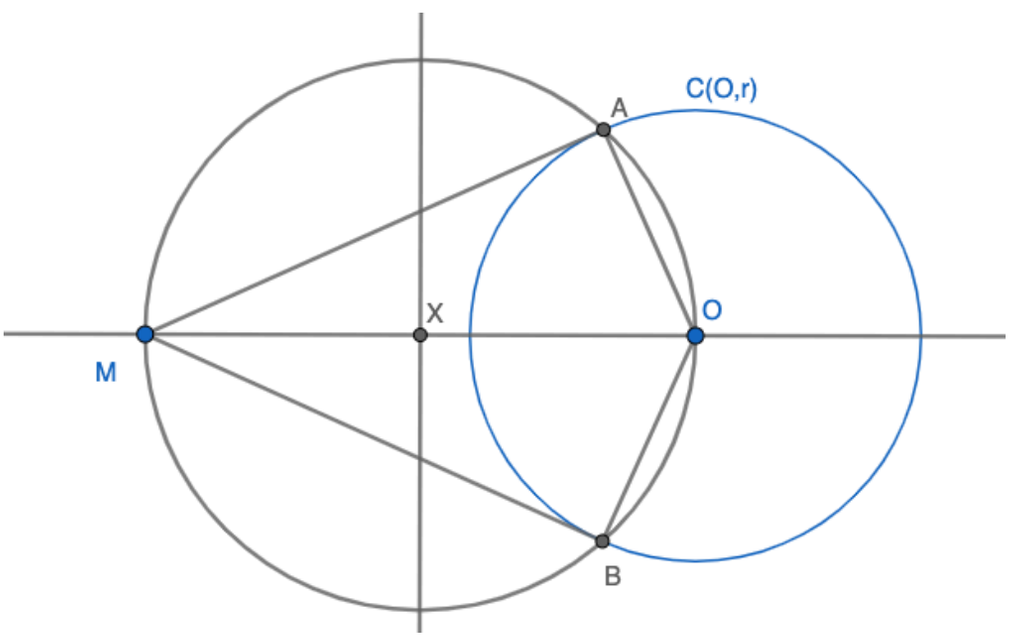
Quelle merveille. Que c'est beau !

Redescendons sur terre et concluons ce chapitre de géométrie par une sélection de constructions particulièrement intéressantes, voire célèbres.

CONSTRUCTION DES TANGENTES À UN CERCLE PASSANT PAR UN POINT DONNÉ

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r.
Les tangentes touchent $\mathcal{C}$ en A et B.
OA = OB MOA et MOB sont congruents
MA = MB
Les tangentes étant perpendiculaires aux rayons : OA $\perp$ MA et OB $\perp$ MB.

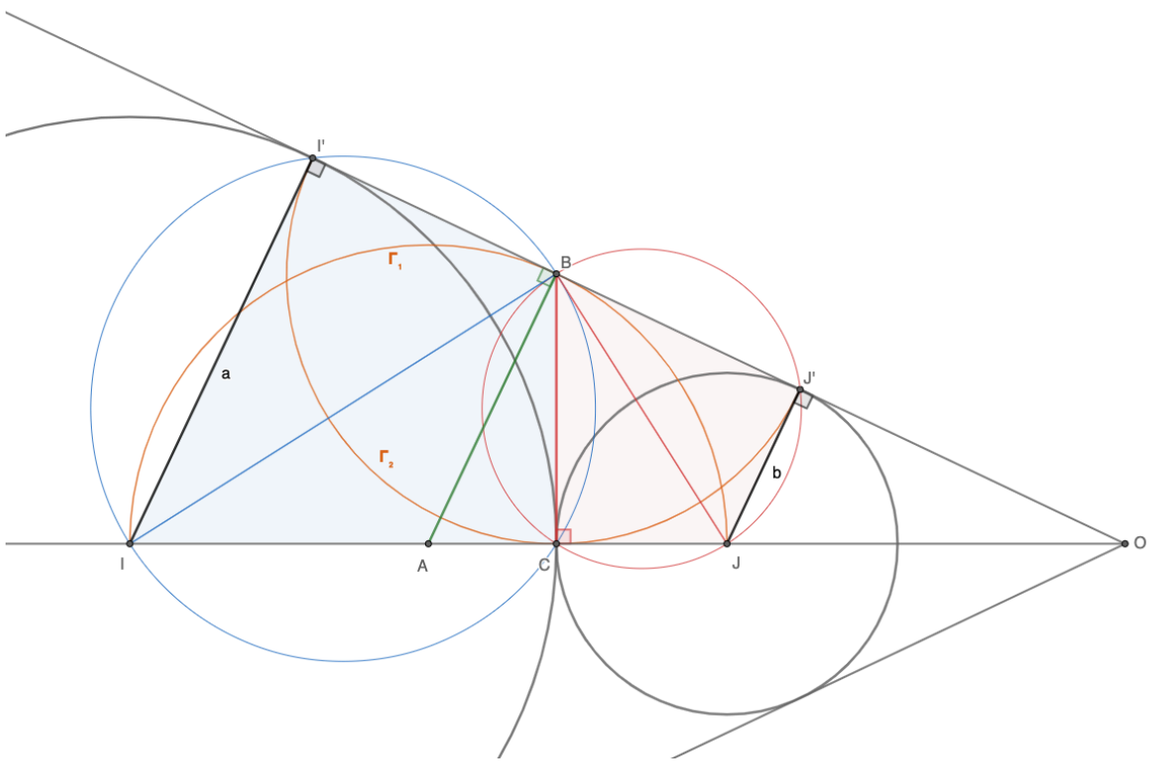
Construction étant donnés $\mathcal{C}$ et M :
On construit la bissectrice de [MO] pour trouver X := le centre de [MO]
On trace le cercle (X,XO) qui coupe $\mathcal{C}$ en A et en B.
MA et MB sont les tangentes recherchées.



CONSTRUCTION DES TANGENTES À DEUX CERCLES TANGENTS & DES MOYENNES

Soit (I) le cercle de centre I et de rayon a.
Soit (J) le cercle de centre J et de rayon b.
Les cercles (I) et (J) sont tangents en C.
On construit A le milieu de [IJ]
On construit le cercle $\mathbf{\Gamma_1}$ = (A, AI) Γ_1 a pour diamètre [IJ]. Son rayon est ½ (a + b)
La perpendiculaire à IJ en C coupe Γ_1 en B.
On trace le cercle $\mathbf{\Gamma_2}$ de centre B et de rayon BC.
Soit I' l'intersection de (I) et de Γ_2
Soit J' l'intersection de (J) et de Γ_2
(I'J') est la tangente recherchée.

Magnifique. Mais comment ça marche ?



Soit O le point de (IJ) tel que *ABO* = 90
I' a été défini comme étant le point de (I) tel que BI' = BC
J' a été défini comme étant le point de (J) tel que BJ' = BC
Pour montrer que I'J' est la tangente commune à (I) et (J) il suffit de montrer que II'B = 90 et BJ'J = 90

Par construction C et I' appartiennent chacun à (I) et à Γ_2 donc ils sont symétriques par rapport à BI.
Comme BCI = 90, alors II'B = 90 I, C, B, I' sont cocycliques

Par construction C et J' appartiennent chacun à (J) et à Γ_2 donc ils sont symétriques par rapport à BJ.
Comme JCB = 90, alors BJ'J = 90 B, C, J, J' sont cocycliques

QED

On définit le point D comme le projeté orthogonal de C sur (I'J').
On a alors construit les 3 moyennes :

Moyenne arithmétique	x_a = AB = ½ (a + b)
Moyenne géométrique	x_g = BC = $\sqrt{ab}$
Moyenne harmonique	x_h = CD = $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$
$x_g = \sqrt{x_a . x_h}$	

Démonstration

Γ_1 a pour diamètre [IJ] AB = AI = AJ = ½ (a + b) *QED*

Γ_2 a pour diamètre [I'J'] BC = BI' = BJ'

Pythagore dans ACB $AB^2 = AC^2 + BC^2$
$BC^2 = AB^2 - AC^2$

Par ailleurs AB = ½ (a + b) & AC = JC – JA = a - ½ (a + b) = ½ (a - b)

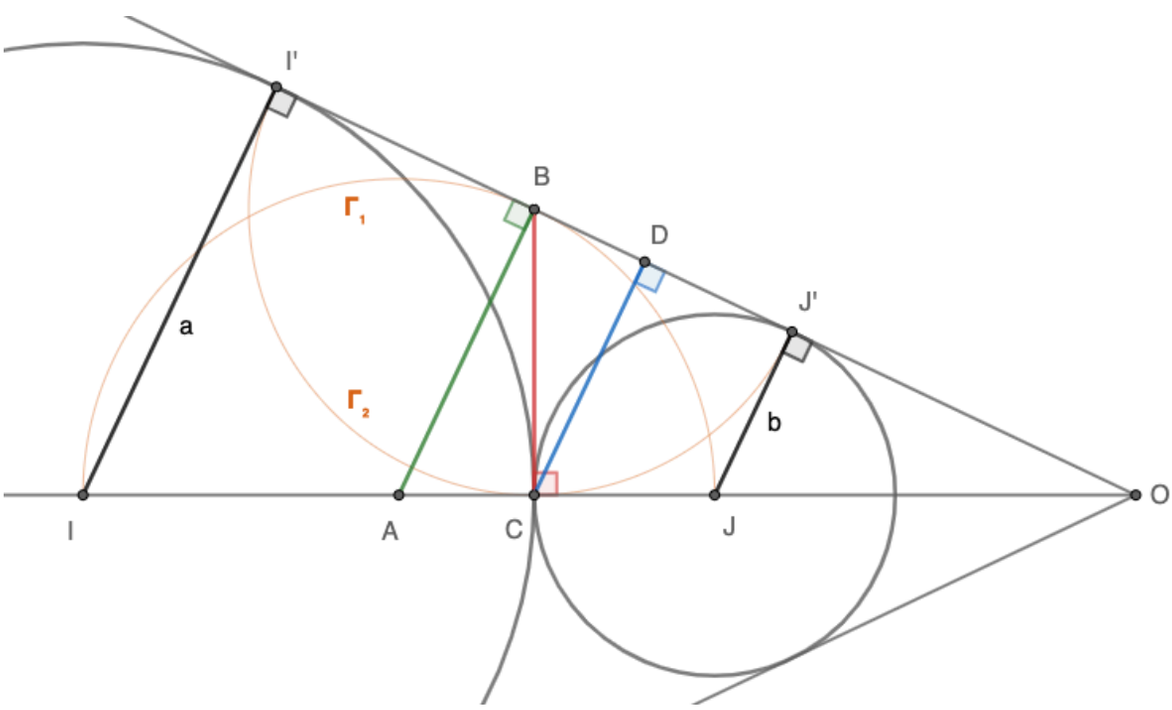
Donc $BC^2 = ¼ (a + b)^2 - ¼ (a - b)^2$
$BC^2 = ab$
BC = $\sqrt{ab}$ *QED*

Pour la troisième moyenne, on transforme la formule : $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ = 2ab / (a+b)

D'après le théorème W:W:W JOJ' ~ AOB ~ COD ~ IOI'
alors II' / IO = AB / AO = CD / CO = JJ' / JO

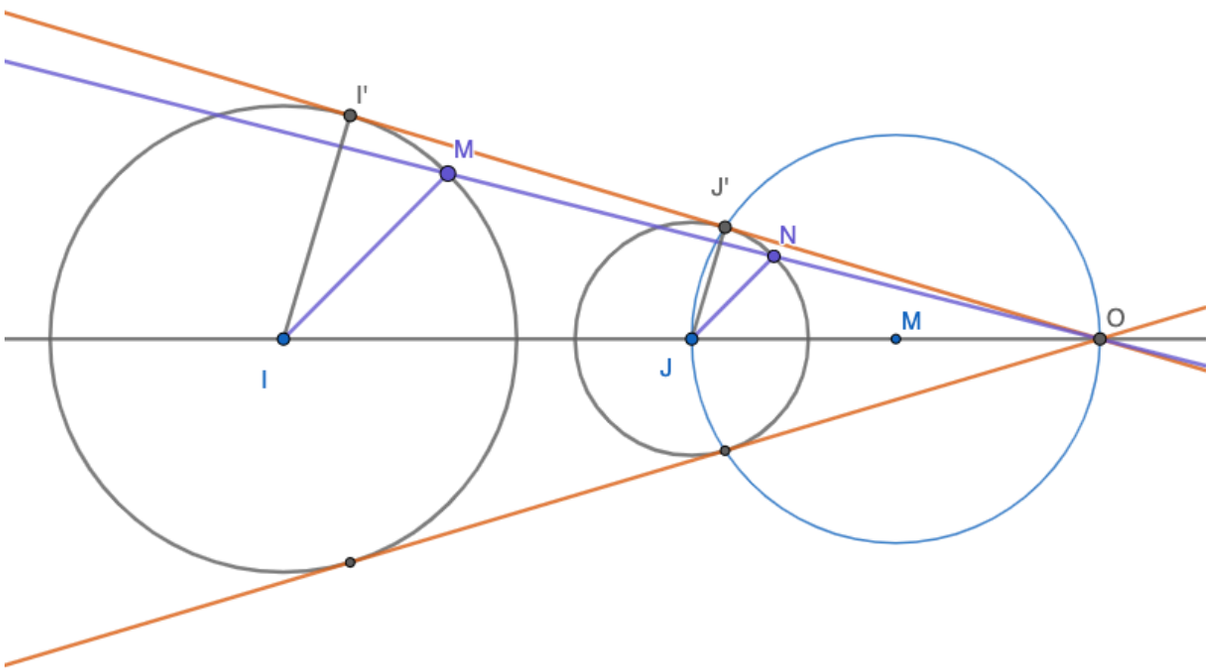
II' / IO = JJ' / JO
a / (a + b + JO) = b / JO
a JO = b(a + b) + b JO
JO = b(a + b) / (a - b)

CD / CO = JJ' / JO
CD / (b + JO) = b / JO
CD = b(b + **JO**) / **JO**
$CD = (b^2(a - b) + b^2(a + b)) / b (a + b)$
CD = 2ab / (a + b) *QED*



CONSTRUCTION DES TANGENTES À DEUX CERCLES

Soit (I) le cercle de centre I et (J) le cercle de centre J.
Le but est de construire la tangente commune à (I) et (J) dans le cas général où les cercles ne sont pas nécessairement tangents.



On choisit un point M quelconque sur le cercle (I).
On construit N sur le cercle (J) de sorte que IM // JN.
Alors O est l'intersection de (IJ) et (MN).

Quelle que soit la position de M sur (I), la position de O sur (IJ) ne varie pas.

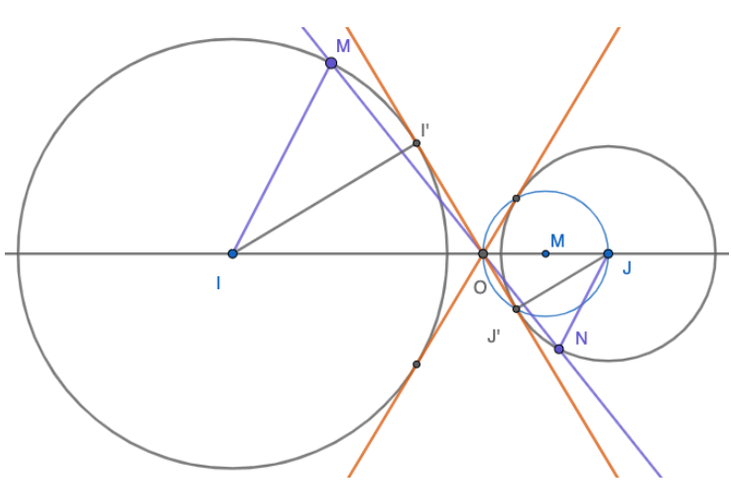
En effet par W:W:W IMO ~ JNO et IM / IO = JN / JO

JO / IO = JN / IM = constante k
JO / (IJ + JO) = k
JO = k.IJ + k. JO
JO = IJ. k/(1-k) = valeur constante

En particulier, la position de O est la même quand M = I' et N = J'.

On est alors ramené au cas étudié précédemment de la tangente à un cercle passant par un point donné :
On construit M = milieu de [JO].
Le cercle (M,MJ) coupe (J) en J'
(OJ') est la tangente recherchée.

On procède de même pour les tangentes intérieures,
avec N de « l'autre côté » de (J) :



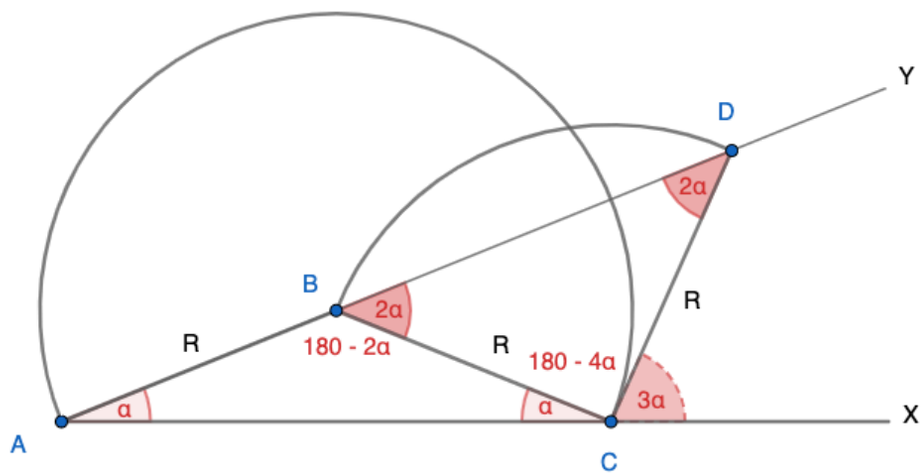
CONSTRUCTION DE L'ANGLE TRIPLE

Si la construction du 1/3 d'angle est impossible (sauf quelques cas particuliers), celle du triple est assez simple.

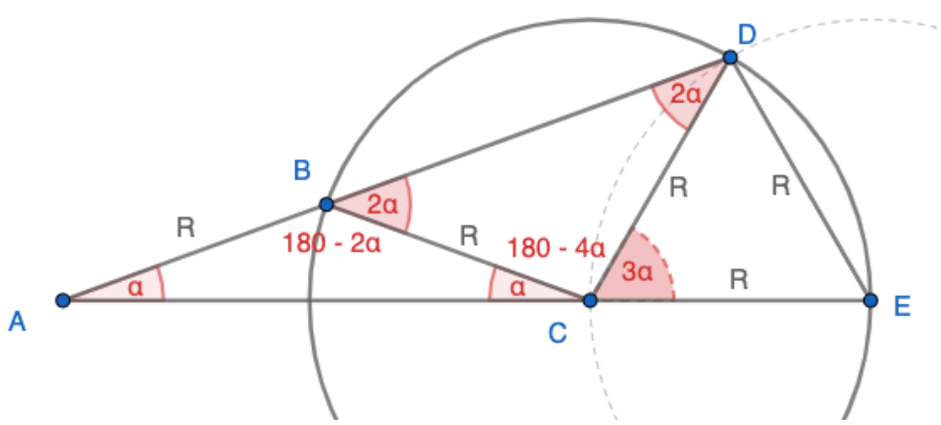
On a deux demi-droites [AX) et [AY) formant un angle *XAY* = α
On prend B au hasard sur [AY) : AB = R

On dessine le cercle $\mathcal{C}$ (B,R) qui coupe [AX) en C puis le cercle $\mathcal{C}$ (C,R) qui coupe [AY) en D.
AB = BC = CD = R : ABC et BCD sont isocèles.
CAB= α → *BCA* = α → *ABC* = 180 - 2α → CBD = 2α → *BDC* = 2α → *DCB* = 180 - 4α
XCD = 180 - α - (180 - 4α) = 3α

Voilà : on est parti de XAY = α et on a construit XCD = 3α



L'ANGLE DE 20 DEGRÉS



CET ANGLE N'EST PAS CONSTRUCTIBE À LA RÈGLE NON GRADUÉE ET AU COMPAS

Dans un cercle $\mathcal{C}$ (C,CE), D est tel que CED soit équilatéral : CE = ED = CD = R

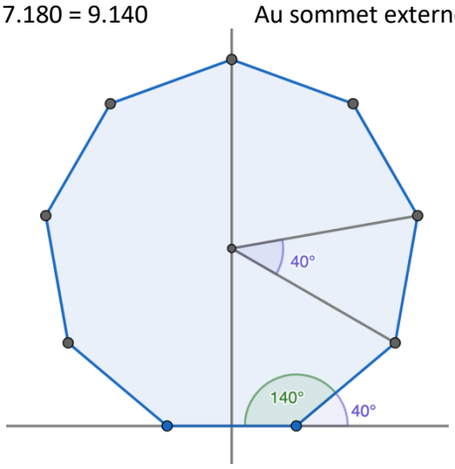
B est le point de $\mathcal{C}$ (BC = R) tel que A qui est l'intersection de CE et BD soit tel AB = R

C'est l'étape qui nécessite une règle graduée

AB = BC = R donc ACB est isocèle et α = *CAB* = *BCA*
Somme des angles de ACB : *ABC* = 180 - 2α
CBD = 180 - *ABC* = 2α
BC = CD = R donc BCD est isocèle et *BDC* = *CBD* = 2α
Somme des angles de BCD : *DCB* = 180 - 4α
BCA + *DCB* + *ECD* = 180 α +180 - 4α + *ECD* = 180 → *ECD* = 3α
Comme *ECD* = 60 3α = 60 α = 20

NONAGONE RÉGULIER

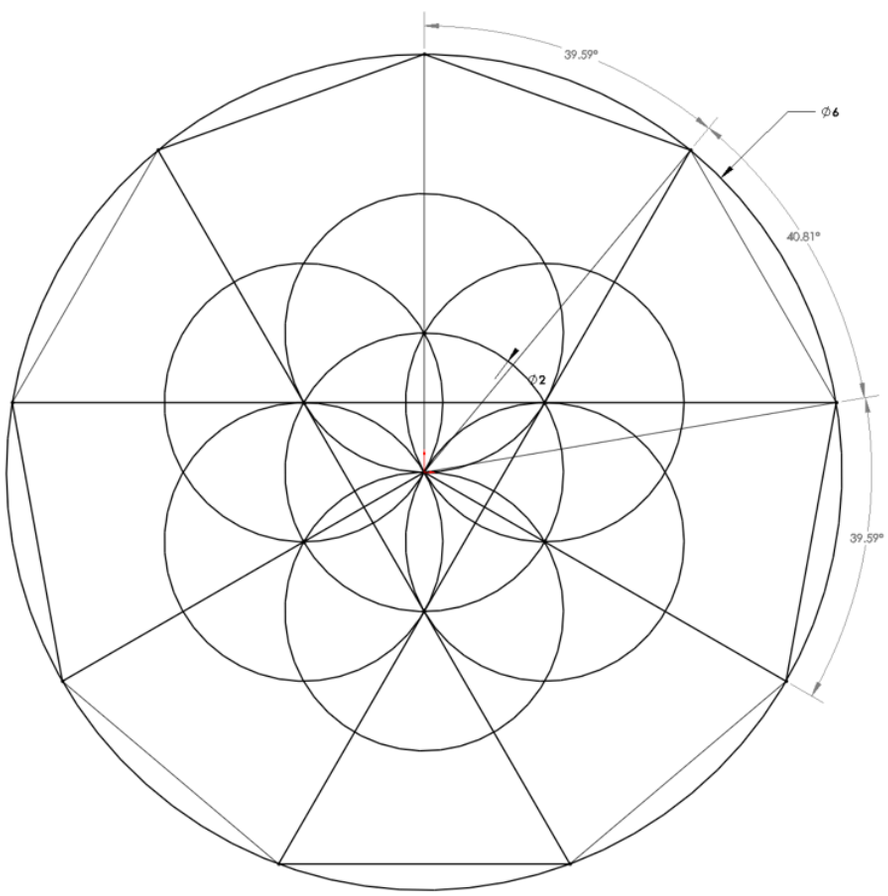
Angles : Au centre : 360 / 9 = 40°
Somme des angles internes = 7.180 = 9.140
Au sommet interne : (9-2).180 / 9 = 140°
Au sommet externe : 180 - 140 = 40°



9 n'est pas de la forme $2^r p_1 p_2 \dots p_k$ avec p_i nombres premiers de Fermat : le nonagone régulier n'est donc pas constructible à la règle et au compas.

Mais il est constructible à la règle marquée et au compas avec la construction dite Neusis présentée à la page suivante : en effet le nonagone est constructible si on peut construire l'angle de 40°, qui est obtenu par report de l'angle de 20°, lui-même obtenu par trisection Neusis de l'angle de 60°.

Voici une jolie construction approximative (à moins de 1° près) avec les rosaces



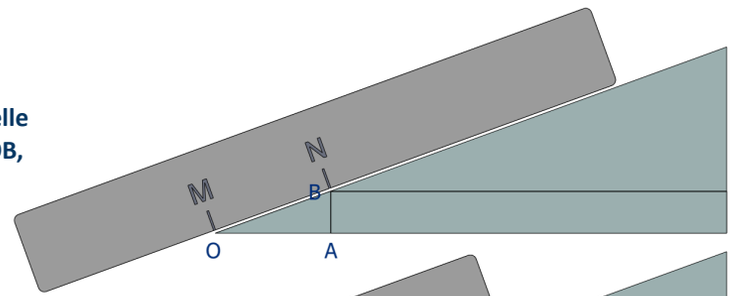
TRISECTION - CONSTRUCTION NEUSIS AVEC RÈGLE MARQUÉE

Neusis veut dire *incliné* en grec.

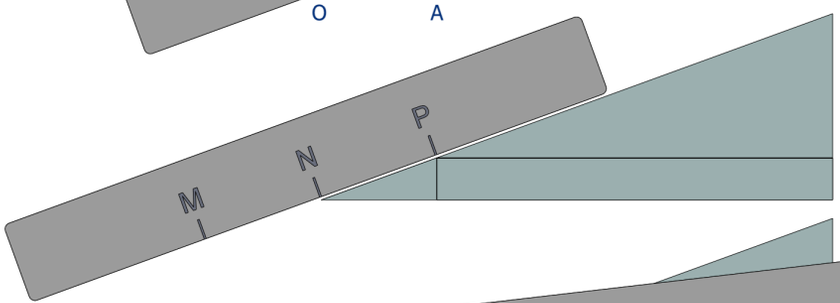
L'angle à partager en trois parties égale est *AOB*.

On trace la perpendiculaire à OA en A et la parallèle à OA en B.

On autorise l'utilisation d'une règle sur laquelle on porte les marques M, N telles que MN = OB,

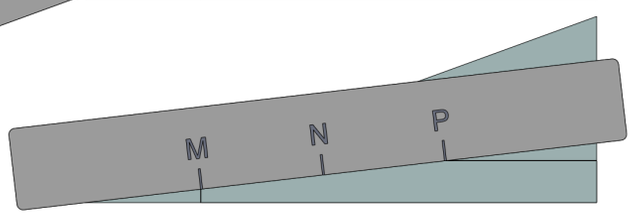


et P telle que NP = OB.



On déplace ensuite la règle de sorte que :

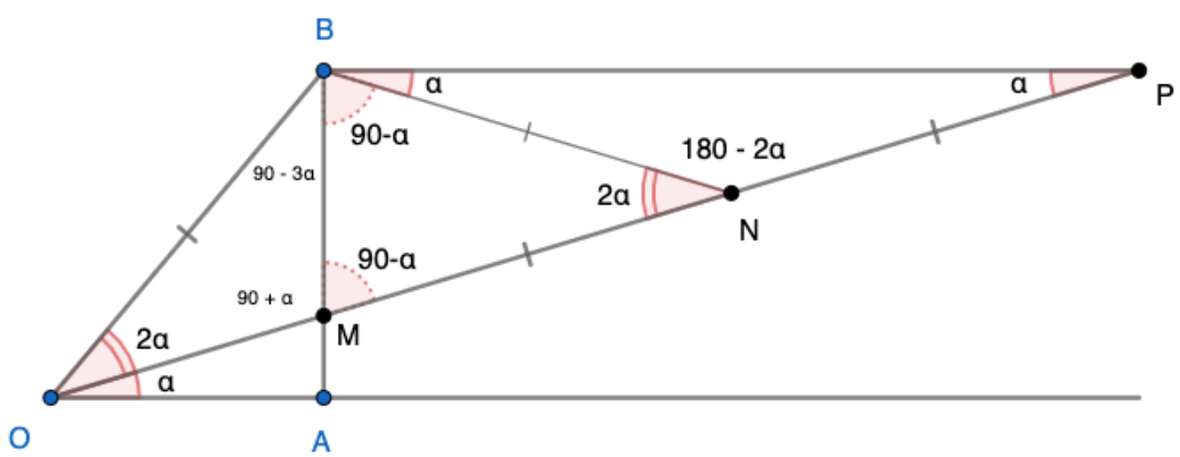
- **la règle passe par O**
- **M soit sur (AB)**
- **P soit sur la parallèle en B.**



Et voilà 1/3 de l'angle de départ.

Justification

OB = BN = NP donc OBN et BNP sont isocèles
Si *BPN* = α, alors *AOM* = α et *NBP* = α → *BNP* = 180 - 2α → *BNO* = 2α → *NOB* = 2α
Donc *AOB* = α + 2α = 3α



THÉORÈME DE MOHR-MASCHERONI

Georg Mohr – mathématicien danois, 1640 - 1697
Lorenzo Mascheroni – mathématicien italien, 1750 - 1800

Si une construction géométrique est possible à la règle et au compas, alors elle est possible au compas seul – sauf bien sûr le tracé effectif des droites.

Est considéré comme constructible tout point d'intersection de deux cercles dont les centres sont des points déjà construits et dont les rayons sont des distances entre des points déjà construits.

Théorème démontré par Georg Mohr en 1672 et par Lorenzo Mascheroni en 1797.

THÉORÈME DE PONCELET-STEINER

Ils ont déjà été présentés …
Jean-Victor Poncelet - général commandant de l'École Polytechnique, 1788 - 1867
Jakob Steiner – mathématicien suisse, 1796 - 1863

Tout point constructible à la règle et au compas peut être construit uniquement à l'aide de la règle à condition que soit tracé dans le plan un cercle avec son centre.

Ce théorème a été démontré par Steiner en 1833 en se basant sur des idées de Poncelet.

On ne va pas montrer ces deux théorèmes, mais ils sont particulièrement intéressants pour la culture générale.

Voyons voir dans les pages suivantes comment on fait des constructions au compas seul…

CONSTRUCTION DU CARRÉ - AU COMPAS SEUL

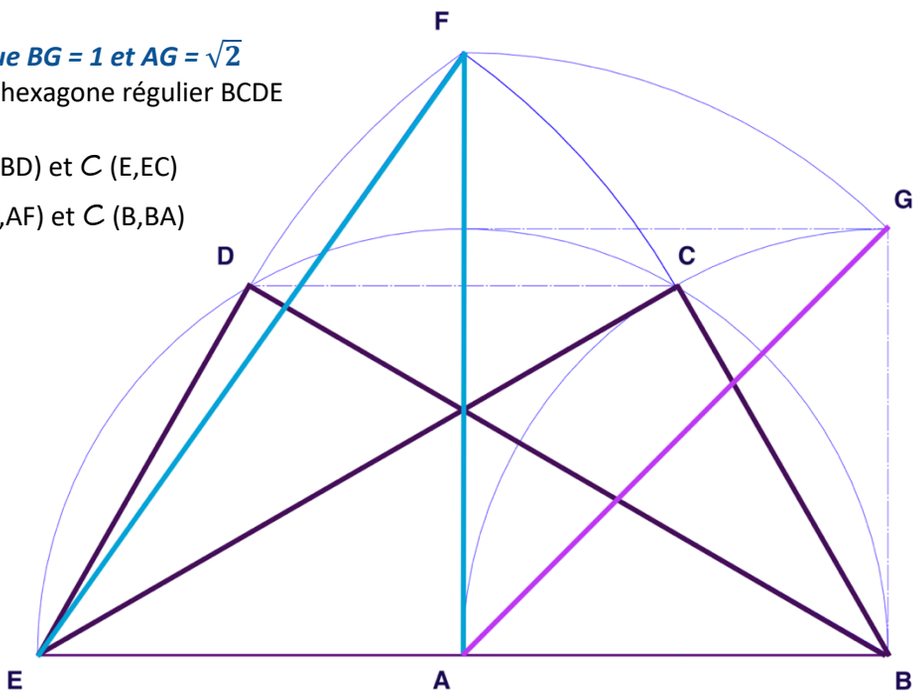
à partir de deux points, sans rapport de longueur (ABGH à partir de A et B)

La théorie

1. A et B sont donnés. AB = 1

On cherche à construire G tel que BG = 1 et AG = $\sqrt{2}$

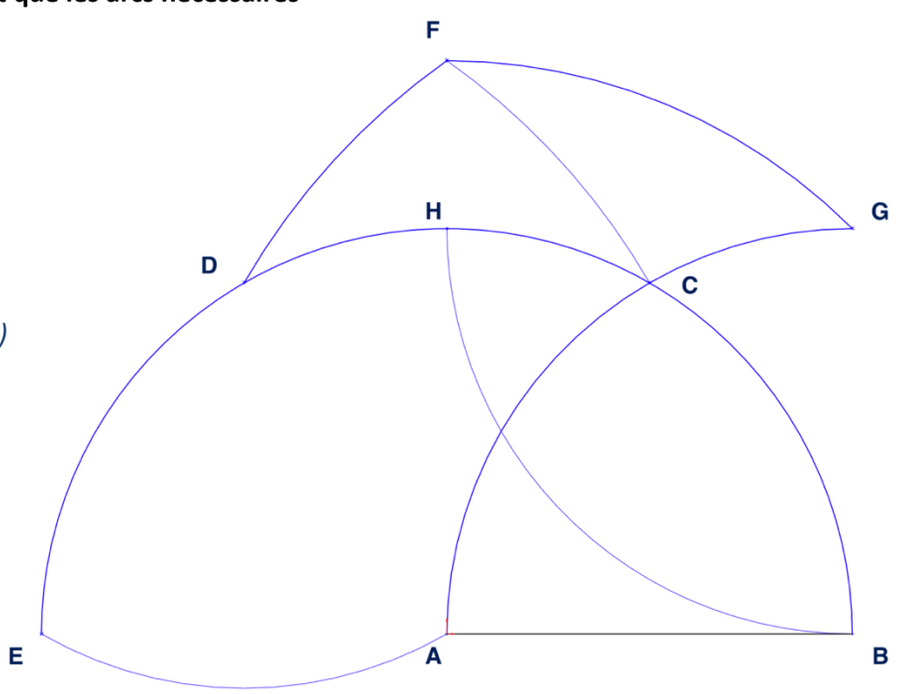
2. On construit la moitié d'un hexagone régulier BCDE
   BC = CD = DE = AB = 1
3. F est l'intersection de $\mathcal{C}$ (B,BD) et $\mathcal{C}$ (E,EC)
4. G est l'intersection de $\mathcal{C}$ (A,AF) et $\mathcal{C}$ (B,BA)



BCE rectangle en C :
$CE^2 = EB^2 - BC^2 = 4 - 1 = 3$
Donc $EC = \sqrt{3}$
EDB rectangle en D : $BD = \sqrt{3}$
Donc $EC = EF = BD = BF = \sqrt{3}$
Dans EAF rectangle en A :
$AF^2 = EF^2 - EA^2 = 3 - 1 = 2$
Donc $AF = \sqrt{2}$, d'où $AG = \sqrt{2}$
BG = AB = 1
Donc G est le coin du carré.

La construction - en ne montrant que les arcs nécessaires

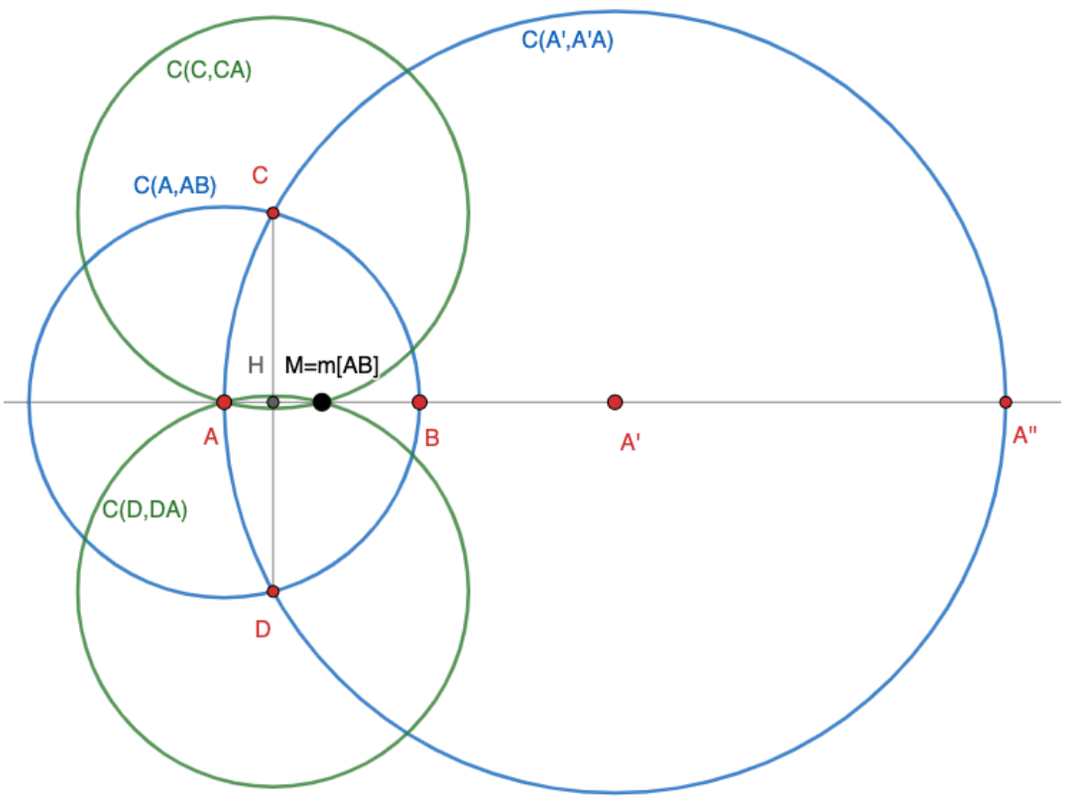
$\mathcal{C}$ (A,AB)
$\mathcal{C}$ (B,BA) → C
$\mathcal{C}$ (C,CB) → D
$\mathcal{C}$ (D,DC) → E
(tracé au compas du symétrique)
$\mathcal{C}$ (E,EC) et $\mathcal{C}$ (B,BD) → F
(tracé au compas de l'angle droit)
$\mathcal{C}$ (A,AF) → G
$\mathcal{C}$ (G,GB) → H
(tracé au compas des parallèles et du carré)



ABGH est un carré.

C'est magnifique.

CONSTRUCTION DU MILIEU D'UN SEGMENT - AU COMPAS SEUL



On cherche à construire le milieu du segment [AB].

1. On construit d'abord A' le symétrique de A par rapport à B (on n'a pas représenté les détails car cette première étape fait partie de la construction précédente).
2. On trace les cercles bleus *C* (A,AB) et *C'* (A',A'A). Ils se coupent en C et D.
3. On trace les cercles verts (C,CA) et (D,DA). Ils se coupent en M, milieu de [AB].

Démonstration

Par construction la figure admet (AB) comme axe de symétrie. M est donc aligné avec A et B.
[AA''] étant un diamètre de *C'* le triangle ACA'' est rectangle en C.
[CH] est la hauteur relative à l'hypoténuse.
Donc $AC^2 = AH \cdot AA''$(propriété des triangles rectangle).
Comme AC = AB et AA'' = 2 AA' on a $AB^2 = AH \cdot 2AA'$
Comme AA' = 2 AB on a $AB^2 = 4AH \cdot AB$ donc AB = 4AH
Comme H est le milieu de [AM] c'est que AB = 2 AM
Ce qui prouve que M est le milieu de [AB].

CERCLE DE NAPOLÉON - MASCHERONI

On cherche à retrouver le centre perdu d'un cercle, en n'utilisant que le compas.
Cette construction viendrait d'une collaboration de l'Empereur avec le mathématicien italien Mascheroni pendant la campagne d'Italie.

CONSTRUCTION PAR INVERSION GÉOMÉTRIQUE

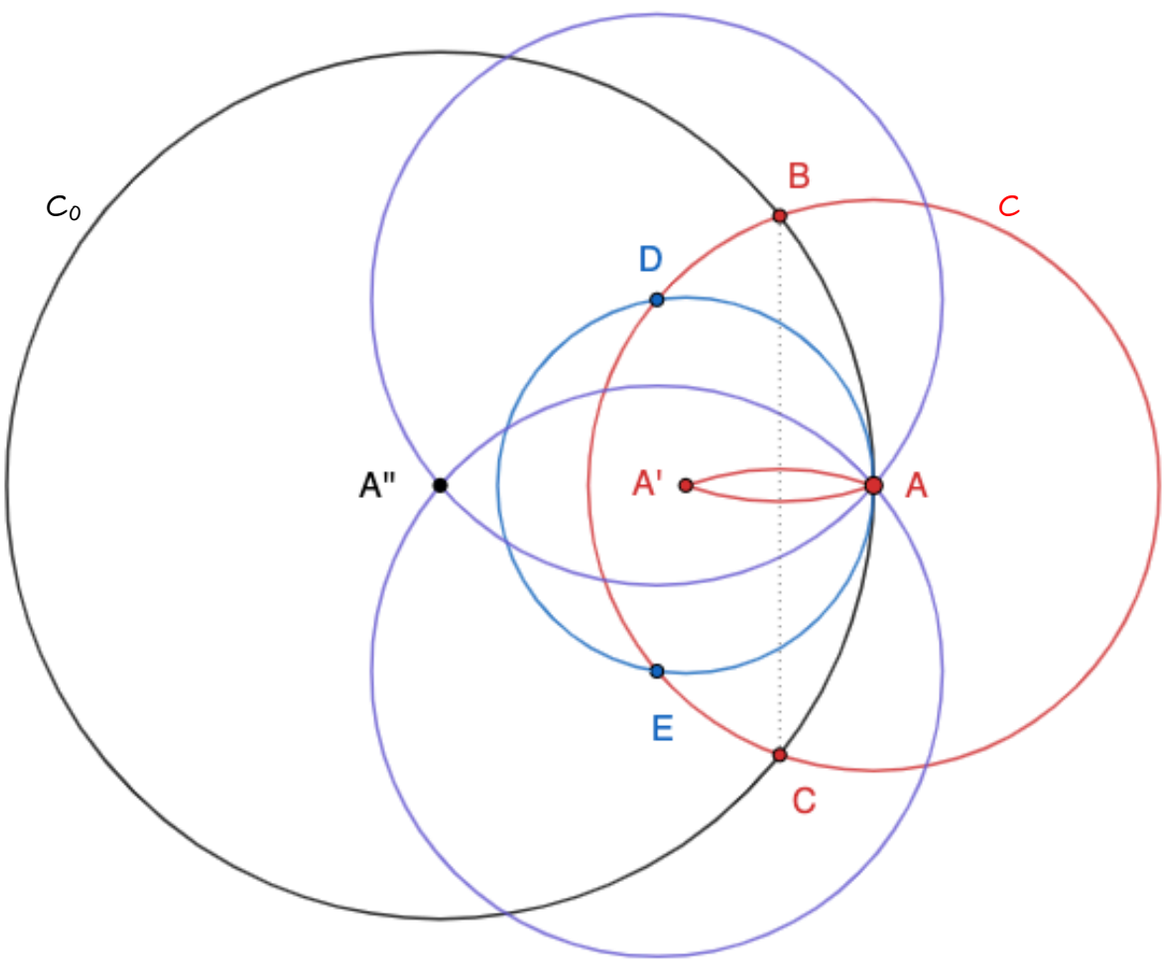
Le cercle noir C_0 est celui dont on veut retrouver le centre.

1. On construit le cercle rouge C centré sur un point A quelconque de C_0, de rayon quelconque.
   C coupe C_0 en B et C.
2. On construit le symétrique A' de A par rapport à (BC) : l'intersection de (B,BA) et (C,CA)

On construit l'image de A' par l'inversion de cercle d'inversion C. Pour cela :

3. On trace le cercle bleu (A',A'A) qui coupe C en D et E.
4. Enfin on trace les cercles mauve (D,DA) et (E,EA).
   Ils se coupent en A'' : le centre du cercle recherché.

C'est de la magie noire ce truc…



Démonstration

Soit ψ l'inversion de cercle d'inversion $\mathcal{C}$(A,r)

On étudie l'image par ψ de la droite (BC).

La droite (BC) elle-même n'est bien sûr pas tracée dans la construction au compas. Elle est cependant entièrement définie par les points B et C qui eux sont construits.

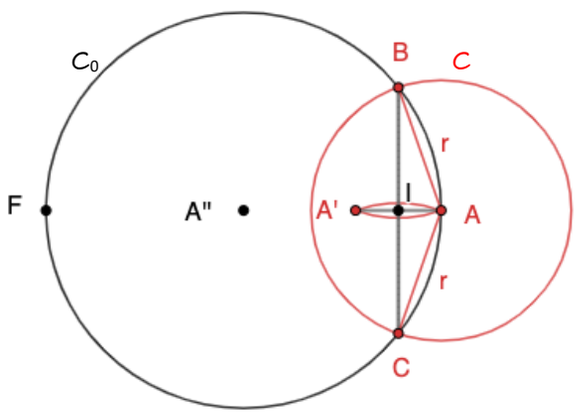
On a vu dans la première section du livre que l'image par inversion d'une droite ne passant par l'origine de l'inversion est un cercle passant par l'origine de l'inversion.

ψ (BC) est donc un cercle passant par A.

Comme B et C sont sur le cercle d'inversion ils sont invariants par ψ.

ψ (BC) est donc le cercle passant A, B, C : c'est $\mathcal{C}_0$ **ψ (BC) = $\mathcal{C}_0$**

Soit I le milieu de [AA']. I est aussi le milieu de [BC].
Soit F le point de $\mathcal{C}_0$ diamétralement opposé à A.



Cherchons ψ (I) :
D'une part I ∈ (BC) donc ψ (I) ∈ ψ (BC) = $\mathcal{C}_0$
D'autre part ψ (I) doit être sur la demi-droite [A,I).
Donc **ψ (I) = F**
Par définition de l'inversion : **AI.AF = r^2** [1]

Soit **A'' = ψ (A')**
Par définition de l'inversion : AA'.AA'' = r^2
Comme AA' = 2AI **2AI.AA'' = r^2** [2]

[1] & [2] **AF = 2AA''**

Comme A, A'' et F sont alignés A'' est le milieu d'un diamètre de $\mathcal{C}_0$
A'' est le centre de $\mathcal{C}_0$

Il reste à montrer pourquoi le cercle bleu et les 2 cercles mauves ont construit ψ(A').

Construction de l'inverse d'un point *intérieur* au cercle d'inversion - au compas seul

Soit ψ l'inversion de cercle d'inversion $\mathcal{C}$(A,r) et un point A' **intérieur** à $\mathcal{C}$.
Pour construire ψ (A') au compas seul :
1. On trace le cercle (A',A'A). Il coupe $\mathcal{C}$ en D et E.
2. On trace les cercles (D,DA) et (E,EA). Ils se coupent en A et en A'' = ψ (A').

Démonstration

A'A = A'D = rayon du cercle (A',A'A) : ADA' est isocèle en A'
DA = DA'' = rayon du cercle (D,DA) : A''AD est isocèle en D

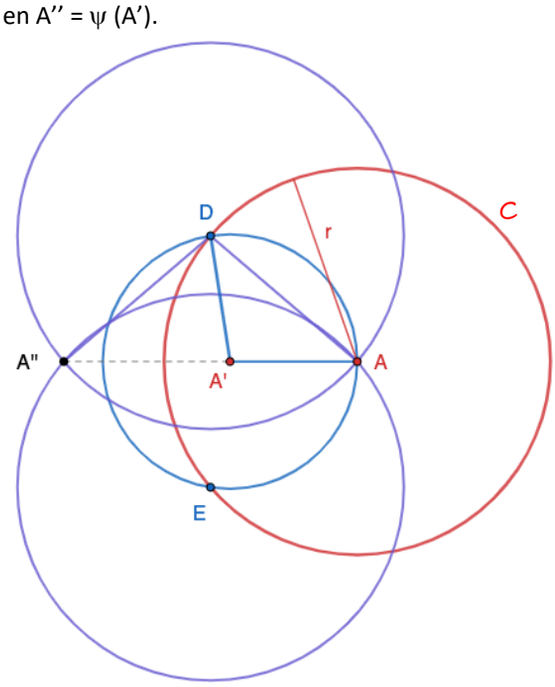
Par le théorème W:W:W on a ADA'' ~ ADA'

Alors AA'/AD = AD/AA''
qui se récrit AA'.AA'' = AD^2

D est sur $\mathcal{C}$ donc AD = r
AA'.AA'' = r^2

Par symétrie de construction A'' est aligné avec A et A' donc A'' = ψ(A')

QED



En bonus car non nécessaire pour la résolution du problème du cercle de Napoléon :

Construction de l'inverse d'un point *extérieur* au cercle d'inversion - au compas seul

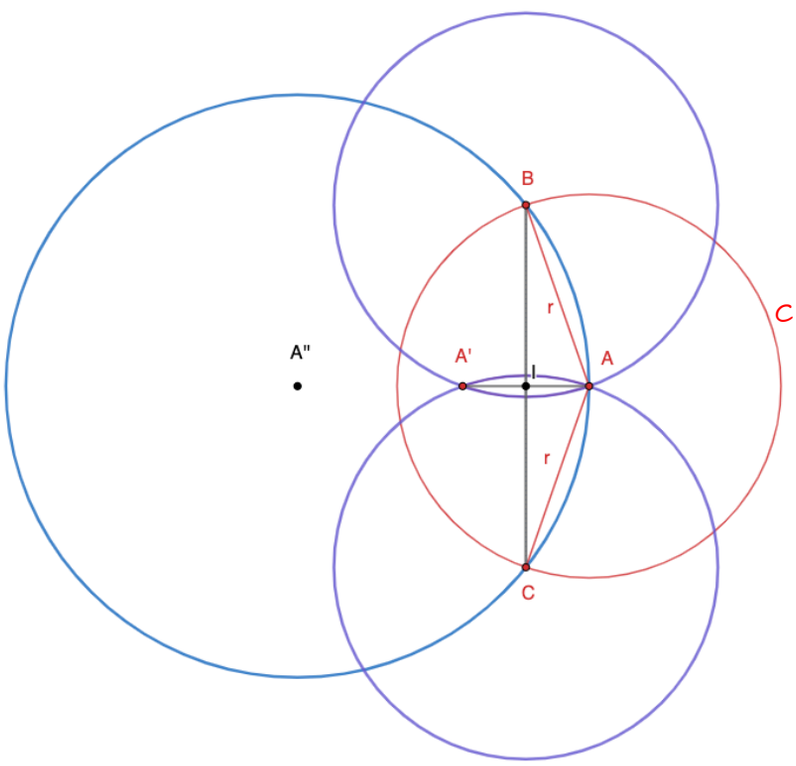
Soit ψ l'inversion de cercle d'inversion $\mathcal{C}$(A,r) et un point A'' **extérieur** à $\mathcal{C}$.
Pour construire ψ (A'') au compas seul :
1. On trace le cercle (A'', A''A). Il coupe $\mathcal{C}$ en B et C.
2. On trace les cercles (B,BA) et (C,CA). Ils se coupent en A et en A' = ψ (A'').

Démonstration

Théorème de Pythagore dans A''IB avec I =m[BC] :
$BA''^2 - BI^2 = IA''^2 = (AA'' - IA)^2$
Comme BA'' = AA'' :
$AA''^2 - BI^2 = AA''^2 - 2AA''.IA + IA^2$
$-BI^2 = -2AA''.IA + IA^2$
$AA''.(2IA) = IA^2 + BI^2$
$AA''.AA' = IA^2 + BI^2$ [1]

Théorème de Pythagore dans BIA :
$IA^2 + BI^2 = BA^2 = r^2$ [2]

[1] & [2] **$AA''.AA' = r^2$**
Comme A, A', A'' sont alignés sur la médiatrice de [BC]
A' = ψ(A'')



PANORAMA DES THÉORÈMES ET OBJETS REMARQUABLES

Types de triangles

équilatéral	isocèle	rectangle	isocèle-rectangle	
acutangle	obtusangle	scalène		

Théorèmes

Pythagore	Thalès	Menelaus	Ceva	Euler
Feuerbach	Miquel	Reim	Terquem	Napoléon
Héron	Carnot	Morley		

Relations

triangles semblables	triangles isométriques	
conjugués isogonaux	conjugués cyclocéviens	conjugués isotomiques
droites antiparallèles	cercles orthogonaux	
division harmonique	points isodynamiques	

Points remarquables

orthocentre	centre de gravité	centre du cercle circonscrit	centre du cercle inscrit	centres des cercles exinscrits
point de Miquel	points de Feuerbach	points de Terquem	point de Spieker	Mittenpunkt
point de Gergonne	point de Nagel	point de Lemoine	points de Brocard	point de Bevan
points de Fermat	points de Napoléon	points de Vecten	point de Longchamps	

Droites remarquables

céviennes	hauteur	médiane	médiatrice	bissectrice
axe radical	droite d'Euler	droite de Simson	droite de Steiner	droite de Newton
symédiane	axe de Brocard	droite centrale	droite de Lemoine	axe orthique

Cercles remarquables

cercle circonscrit	cercle inscrit	cercle exinscrit	cercle polaire	cercle pédal
cercle de Miquel	cercle d'Euler	cercle de Taylor	cercle d'Apollonius	
cercle de Brocard	cercles de Lemoine	cercles de Tucker		
cercle de Lamoen	cercle de Lester			

Triangles remarquables

triangle orthique	triangle médian	triangle antimédian	triangle tangentiel	triangles de Kiepert

Coniques remarquables

hyperbole de Kiepert	hyperbole de Jerabek	hyperbole de Feuerbach	
parabole de Kiepert			
ellipse de Steiner	ellipse de Mandart	ellipse de Brocard	ellipse de Lemoine

Vous connaissez maintenant tous ceux en noir.
Je vous suggère ceux en bleu comme approfondissement.

HILBERTS AXIOMENSYSTEM DER EUKLIDISCHEN GEOMETRIE

Weil der seit Euklid überlieferte Aufbau der Theorie noch Lücken enthielt, hat **David Hilbert** in seinen *Grundlagen der Geometrie* (1899 und weitere Auflagen) ein **Axiomensystem** aufgestellt, aus dem er die euklidische Geometrie bis auf Isomorphie eindeutig aufbauen konnte.

Hilbert verwendet für seine Axiomatische Grundlegung der euklidischen Geometrie
„drei verschiedene Systeme von Dingen“: Punkte, Geraden und Ebenen, und
„drei grundlegende Beziehungen“: liegen, zwischen und kongruent.

Über die Natur dieser „Dinge“ und auch ihrer „Beziehungen“ macht Hilbert keinerlei Annahmen.
Sie sind ausschließlich implizit definiert, nämlich durch ihre Verknüpfung in einem Axiomensystem.

Hilbert verknüpft die „Dinge“ und „Beziehungen“ durch 21 Axiome in fünf Gruppen:

Gruppe I Axiome der Verknüpfung (oder Inzidenz)
I.1. Zwei voneinander verschiedene **Punkte** P und Q bestimmen stets eine **Gerade** g.
I.2. Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.
I.3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte, in einer **Ebene** gibt es stets wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.
I.4. Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte P, Q, R bestimmen stets eine Ebene.
I.5. Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene.
I.6. Wenn 2 Punkte P und Q einer Geraden g in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von g in α
I.7. Wenn 2 Ebenen α und β einen Punkt P gemeinsam haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt Q gemeinsam.
I.8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

Die Axiome 1–3 heißen ebene Axiome der Gruppe I und Axiome 4–8 räumliche Axiome der Gruppe I.
Aus diesen Axiomen allein lässt sich folgern, dass

- 2 verschiedene Geraden sich in genau 1 Punkt oder überhaupt nicht schneiden,
- 2 verschiedene Ebenen sich in genau 1 Geraden oder überhaupt nicht schneiden,
- 1 Ebene und 1 nicht in ihr liegende Gerade sich in genau 1 Punkt oder überhaupt nicht schneiden,
- 1 Gerade und 1 nicht auf ihr liegender Punkt 1 Ebene bestimmen,
- 2 verschiedene, sich schneidende Geraden 1 Ebene bestimmen.

Gruppe II Axiome der Anordnung
Der Begriff ***zwischen*** wird definiert als eine Beziehung zwischen 3 Punkten.
Wird von 3 Punkten gesagt, dass der eine zwischen den beiden anderen liegt, so ist damit stets ausgedrückt, dass es verschiedene Punkte sind, und dass sie auf einer Geraden liegen.
II.1. Wenn B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.
II.2. Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.
II.3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den beiden anderen liegt.

Auf Grund dieser Axiome lässt sich definieren, was eine ***Strecke*** AB ist: die Menge aller Punkte, die zwischen A und B liegen. Die Strecken AB und BA sind nach dieser Definition identisch.

II.4. Es seien A,B,C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen dieser drei Punkte trifft; wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.

Dieses Axiom hat eine besondere wissenschaftsgeschichtliche Bedeutung, da es bei Euklid nicht vorkommt.
Es folgt, dass zwischen zwei gegebenen Punkten einer Geraden stets noch unendlich viele weitere Punkte liegen, dass die Punkte einer Geraden also in sich dicht liegen.
Ferner lässt sich zeigen, dass jede Gerade als Punktmenge auf genau zwei Weisen geordnet werden kann, so dass ein Punkt C genau dann zwischen den Punkten A und B liegt, wenn A<C<B oder B<C<A ist.
Es folgt auch, dass jede Gerade eine Ebene in 2 Gebiete aufteilt.
Genauso trennt jede Ebene den Raum in 2 Gebiete.

Gruppe III Axiome der Kongruenz
Der Begriff ***kongruent*** wird als eine Beziehung zwischen *Strecken* und zwischen *Winkeln* definiert.
Eine andere Bezeichnung hierfür ist *gleich* oder (bei Strecken) *gleich lang*.

Als Zeichen hierfür verwendet Hilbert ≡
III.1. Wenn A und B zwei Punkte auf einer Geraden a sind und ferner A‘ ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a’ ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a’ von A’ stets einen Punkt B’‘ finden, so dass die Strecke AB der Strecke A’B’ *kongruent* (oder *gleich*) ist, in Zeichen: AB ≡ A’B’

Von jedem Punkt aus kann also jede beliebige Strecke abgetragen werden. Dass diese Abtragung *eindeutig* ist, lässt sich aus der Gesamtheit der Axiome I–III beweisen, ebenso, dass AB ≡ AB ist und dass aus AB ≡ A’B’ stets A’B’ ≡ AB folgt (Reflexivität und Symmetrie).

III.2. Wenn eine Strecke zu zwei anderen Strecken *kongruent* ist, so sind diese auch zueinander *kongruent*; formaler: wenn AB ≡ A’B’ und AB ≡ A’’B’’, so ist AB ≡ A’’B’’.
Es wird also gefordert, dass die Kongruenz-Relation transitiv ist. Damit ist sie eine Äquivalenzrelation.

III.3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden und ferner A’B’ und B’C’ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a‘ ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann AB ≡ A’B’ und BC ≡ B’C’, so ist auch stets AC ≡ A’C’’.

Beim Zusammenfügen (Addieren) von Strecken bleibt die Kongruenz also erhalten.
Ein ***Winkel*** wird nun definiert als ein ungeordnetes Paar von Halbgeraden, die von einem gemeinsamen Punkt S ausgehen und nicht zur selben Geraden gehören.
Zwischen ∢(h,g) und ∢(g,h) wird also nicht unterschieden; auch gibt es nach dieser Definition weder überstumpfe noch gestreckte Winkel.
Es kann auch definiert werden, was das ***Innere*** eines Winkels ∢(h,g) ist: es sind dies all diejenigen Punkte der von g und h aufgespannten Ebene, die mit h zusammen auf der gleichen Seite von g und mit g zusammen auf der gleichen Seite von h liegen. Ein Winkel umfasst stets weniger als eine Halbebene.

III.4. Es sei ein Winkel ∢(h,g) in einer Ebene α und eine Gerade a’ in einer Ebene α’, sowie eine bestimmte Seite von a’ auf α’ gegeben. Es bedeute h’ einen Halbstrahl der Geraden a’; dann gibt es in der Ebene α’ einen und nur einen Halbstrahl g’, so dass der Winkel ∢(h,g) *kongruent* (oder *gleich*) dem Winkel ∢(h’,g’) ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels ∢(h,g’) auf der gegebenen Seite von a’ liegen.
In Zeichen: ∢(h,g) ≡ ∢(h’,g’)
Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, das heißt, es ist stets ∢(h,g) ≡ ∢(h,g)

Kurz gesagt bedeutet dies: ein jeder Winkel kann in einer gegebenen Ebene an einen gegebenen Halbstrahl nach einer gegebenen Seite dieses Halbstrahls auf eine eindeutig bestimmte Weise abgetragen werden.
Die *Eindeutigkeit* der Konstruktion und die *Selbstkongruenz* hier (im Gegensatz zu der Kongruenz von Strecken) muss axiomatisch festgelegt werden.

III.5. Aus ∢(h,g) ≡ ∢(h’,g’) und ∢(h,g) ≡ ∢(h’’,g’’) folgt ∢(h’,g’) ≡ ∢(h’’,g’‘).
Es folgt, dass die Kongruenz für Winkel eine transitive und symmetrische Relation ist.
Nachdem in naheliegender Weise definiert wurde, was unter ∢ABC zu verstehen ist, lässt sich formulieren:

III.6. Wenn für zwei Dreiecke ABC und A’B’C’ die Kongruenzen AB ≡ A’B’, AC ≡ A’C’ und ∢BAC ≡ ∢B’A’C’ gelten, so sind auch stets die Kongruenzen ∢ABC ≡ ∢A’B’C’ und ∢ACB ≡ ∢A’C’B’ erfüllt.

Es handelt sich hier um den Kongruenzsatz SWS, den Hilbert als Axiom setzt.
Die übrigen Kongruenzsätze lassen sich hieraus beweisen, ebenso die Addierbarkeit von Winkeln. Es lässt sich eine < Beziehung unter Winkeln definieren, die mit der Kongruenz verträglich ist.
Weiter definiert Hilbert den Begriff ***Nebenwinkel*** in naheliegender Weise, und den Begriff ***rechter Winkel*** als einen Winkel, der mit seinem Nebenwinkel kongruent ist.
Es lässt sich dann zeigen, dass alle rechten Winkel zueinander kongruent sind.
Euklid hatte dies unnötigerweise als Axiom gesetzt.

Gruppe IV Axiom der Parallelen

IV. (auch **Euklidisches Axiom**) Es sei g eine beliebige Gerade und P ein Punkt außerhalb von g. Dann gibt es in der durch g und P bestimmten Ebene *höchstens* eine Gerade g', die durch P verläuft und g nicht schneidet.

Dass es *mindestens* eine solche Gerade gibt, folgt aus den Axiomen I–III und unmittelbar aus dem daraus hergeleiteten *Satz vom Außenwinkel*. Diese einzige Gerade g' heißt die ***Parallele zu g durch P***.

Dieses Axiom mit seinen Voraussetzungen und Folgerungen ist wahrscheinlich der meistdiskutierte Gegenstand der Geometrie.

Ferner folgt aus den Axiomen I–IV, dass *die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt*.
Unter diesen Voraussetzungen lässt sich das Axiom auch gleichwertig so formulieren :
Es existiert ein Rechteck.

Gruppe V Axiome der Stetigkeit
V.1. (Axiom des Messens oder **Archimedisches Axiom)**. Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl n derart, dass das n-malige Hintereinanderabtragen der Strecke CD von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinausführt.

Durch jede noch so kleine Strecke CD lässt sich also, wenn man sie nur oft genug aneinandersetzt, jede noch so große Strecke AB übertreffen.
Man könnte auch sagen: Es gibt keine „unendlich kleinen" oder „unendlich großen" Strecken; die natürlichen Zahlen reichen aus, um alle Strecken vergleichbar (im Sinne von größer, kleiner, gleich) zu machen.

V.2. (Axiom der (linearen) Vollständigkeit) Zu den Punkten einer Geraden können, bei Erhalt ihrer Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen, keine weiteren Punkte hinzugefügt werden, ohne dass die unter den vorherigen Elementen bestehenden Beziehungen, die aus den Axiomen I–III folgenden Grundeigenschaften der linearen Anordnung und Kongruenz oder aber das Axiom V.1 verletzt wird.

Die euklidische Geometrie ist also die *größtmögliche* Geometrie, die den vorhergehenden Axiomen entspricht. Sie ist damit vollständig im gleichen Sinne, wie reelle Zahlen vollständig sind. Deshalb lässt sich auch die analytische Geometrie des R^3 als Modell für die euklidische Geometrie verwenden.
Deutlicher wird dies noch in dem – aus V.2 folgenden – „**Vollständigkeitssatz**":

Die Elemente (Punkte, Geraden und Ebenen) der Geometrie bilden ein System, das bei Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome zu keiner Erweiterung durch zusätzliche Punkte, Geraden und/oder Ebenen mehr fähig ist.

Ohne das Archimedische Axiom ist diese Forderung nicht erfüllbar. Vielmehr lässt sich jede Geometrie, die den Axiomen I–IV, aber nicht V.1, entspricht, noch durch zusätzliche Elemente erweitern. Es entstehen dann Nichtstandard-Systeme.
Andererseits ist auch das Vollständigkeitsaxiom V.2 unentbehrlich, es lässt sich nicht aus den Axiomen I–V.1 ableiten. Gleichwohl lässt sich ein großer Teil der euklidischen Geometrie ohne das Axiom V.2 entwickeln.

UNE DÉMONSTRATION ENTIÈREMENT SYNTHÉTIQUE DU THÉORÈME DE FEUERBACH

UNE DÉMONSTRATION DE JEAN-LOUIS AYME

On a déjà apporté deux preuves du théorème de Feuerbach.
Alors pourquoi une troisième ?
Une approche puriste de la géométrie consiste à snober les méthodes calculatoires comme les coordonnées trilinéaires et barycentriques. On peut voir leur emploi comme l'équivalent de l'usage de bâtons de dynamite pour pêcher. Ça marche… mais ce n'est pas la classe.

Notre première démonstration s'appuie sur la réciproque du théorème de Casey dont la preuve rentre dans la catégorie de celles faisant usage des produits d'Alfred Nobel : cette démonstration se trouve ainsi disqualifiée du concours d'élégance.
C'est d'ailleurs la raison pour laquelle le théorème de Casey est le seul de tout le livre qu'on n'a pas démontré.

La démonstration par inversion est fort belle, mais l'inversion est une invention du XIX siècle. Ça marche très bien mais c'est à la géométrie euclidienne ce qu'une montre à quartz est à une belle mécanique suisse.

Voici donc le fin du fin : une démonstration purement synthétique (i.e. élémentaire).
Elle tient en juste une page… à laquelle s'ajoutent 13 pages de démonstrations de résultats préalables.
En particulier on va avoir besoin du théorème des 6 cercles de Miquel. Comme on l'avait montré par inversion, il nous faut le remontrer de façon élémentaire.

LE THÉORÈME DE REIM

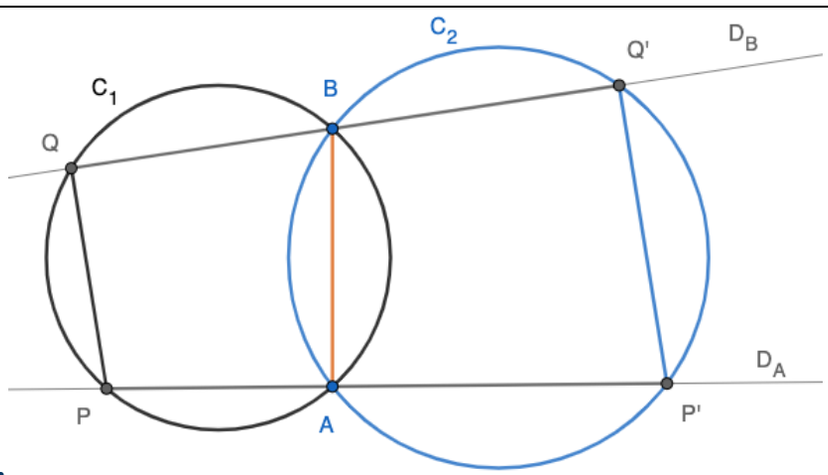
Terminologie

Soient C_1 et C_2 deux cercles sécants — les cercles de Reim
A, B les points d'intersection de C_1 et C_2 — les points de base
D_A, D_B deux droites passant par A, B
P, P' les seconds points d'intersection de D_A avec C_1 et C_2
Q, Q' les seconds points d'intersection de D_B avec C_1 et C_2

[AB] est la double corde
D_A est la A-**monienne**, notée (PAP') relativement à C_1 et C_2
Le 1er point est sur le 1er cercle cité ; le 2nd point est le point de base ; le 3ème point est sur le 2nd cercle.
D_B est la B-monienne, notée (QBQ') relativement à C_1 et C_2
(PQ) est la droite de départ
(P'Q') est la résultante
(PAP') est une A-monienne naissante.

LE THÉORÈME DES DEUX CERCLES DE REIM

Pour tout couple de cercles de Reim et pour tout couple de moniennes,
(PQ) // (P'Q') : la résultante est parallèle à la droite de départ.

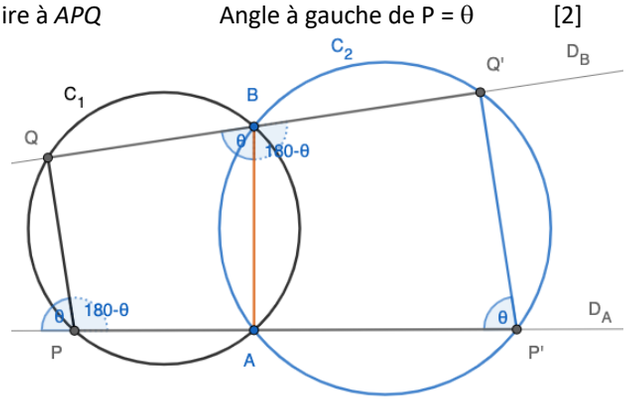


Démonstration

Soit $Q'P'A = \theta$ [1]
Théorème de l'angle inscrit dans C_2 sur la corde AQ' : $ABQ' = 180 - \theta$
QBA est supplémentaire à ABQ' — $QBA = \theta$
Théorème de l'angle inscrit dans C_1 sur la corde AQ : $APQ' = 180 - QBA = 180 - \theta$
Angle à gauche de P est supplémentaire à APQ — Angle à gauche de P = θ [2]
[1] & [2] : **(PQ) // (P'Q')**

QED

La démonstration est réversible :
le théorème l'est aussi.



LES THÉORÈMES DE REIM - AYME

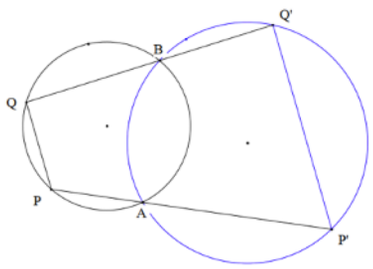
Le théorème des deux cercles de Reim se décline en huit extensions :
les 8 théorèmes de Reim-Ayme.

L'appel du théorème N' réfère à la deuxième équivalence.

THÉORÈME 0

$\mathcal{D}_B$ est une droite ⇔ PQ // P'Q'

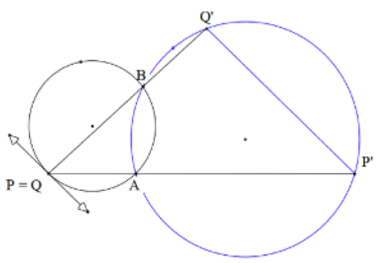
⇔ A, P', Q', B sont cocycliques



THÉORÈME 1 P = Q

$\mathcal{D}_B$ est une droite ⇔ T_P // P'Q'

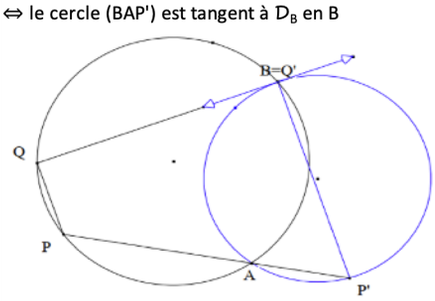
⇔ A, P', Q', B sont cocycliques



THÉORÈME 2 B = Q'

$\mathcal{D}_B = T_B$ ⇔ PQ // P'B

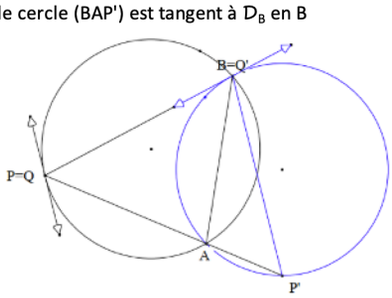
⇔ le cercle (BAP') est tangent à $\mathcal{D}_B$ en B



THÉORÈME 3 P = Q B = Q'

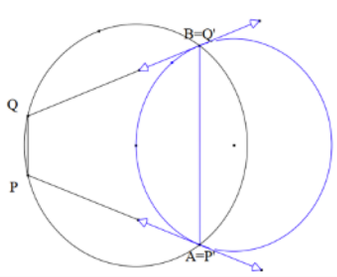
$\mathcal{D}_B = T_B$ ⇔ Tp // P'B

⇔ le cercle (BAP') est tangent à $\mathcal{D}_B$ en B



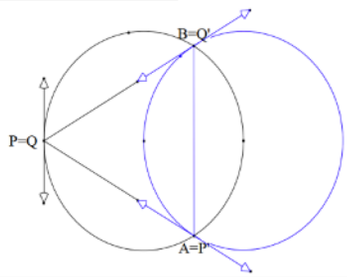
THÉORÈME 4 A = P' B = Q'

$\mathcal{D}_B = T_B$ ⇔ PQ // AB ⇔ le cercle passant par A et B, tangent à $\mathcal{D}_A$ en A, est tangent à $\mathcal{D}_B$ en B



THÉORÈME 5 P = Q A = P' B = Q'

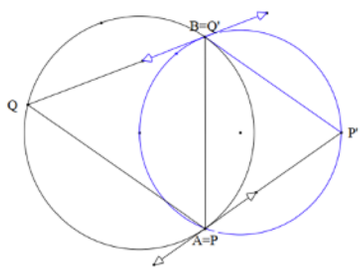
$\mathcal{D}_B = T_B$ ⇔ T_P // AB ⇔ le cercle passant par A et B, tangent à $\mathcal{D}_A$ en A, est tangent à $\mathcal{D}_B$ en B



THÉORÈME 6 A = P B = Q'

$\mathcal{D}_B = T_B$ ⇔ T_B // T_A

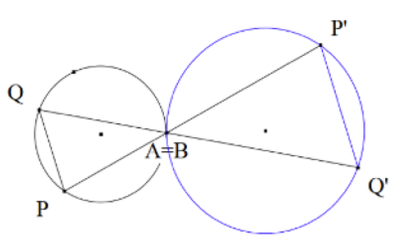
(P'B) // (AQ) ⇔ le cercle (BAP') est tgt à $\mathcal{D}_B$ en B



THÉORÈME 7 A = B

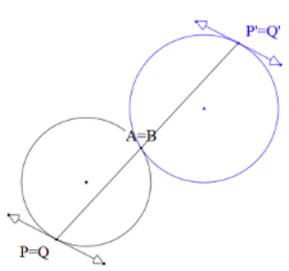
$\mathcal{D}_B$ est une droite ⇔ PQ // P'Q'

⇔ le cercle (AQ'P') est tangent à C_1 en A



THÉORÈME 8 A = B P = Q P' = Q'

$\mathcal{D}_B$ est une droite ⇔ T_P // $T_{P'}$ ⇔ le cercle passant par A et P', tangent à C_1 en A, est tangent à $T_{P'}$ en P'



DU THÉORÈME DE REIM AUX THÉORÈMES DES CERCLES DE MIQUEL

Le théorème de Reim met en jeu deux cercles, deux moniennes et une droite de départ.
Nous allons voir comment étendre le champ d'action de ce théorème en transformant successivement chaque droite en un cercle.
- Nous remplaçons $\mathcal{D}_B$ par un cercle passant par B
- Puis nous remplaçons (PQ) par un cercle passant par P et Q
- Enfin nous remplaçons $\mathcal{D}_A$ par un cercle passant par A.

LE THÉORÈME DES TROIS CERCLES DE MIQUEL – par le théorème de Reim

Partant des cercles de Reim $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sécants aux points de base A, B et de la A-monienne $\mathcal{D}_A$
on ajoute $\mathcal{C}_3$ un cercle passant par B.
Soient Q, Q' les seconds points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ avec $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$
Soit R le second point d'intersection de (PQ) avec $\mathcal{C}_3$
Alors (P'Q'R) est une Q'-monienne de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Démonstration

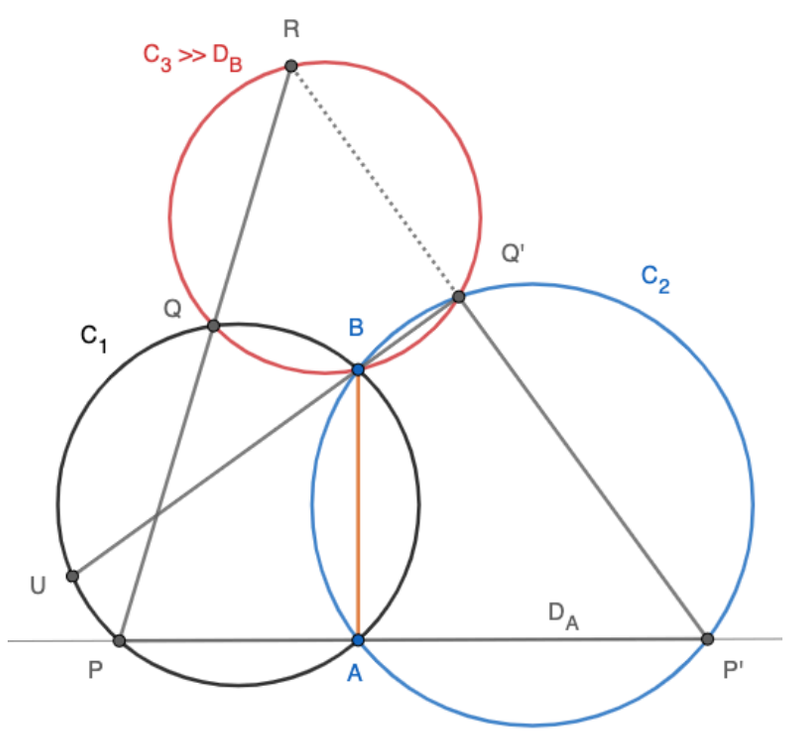
Soit U le second point d'intersection de (Q'B) avec $\mathcal{C}_1$

On applique le théorème de Reim à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, aux points de base A et B, aux moniennes (P'AP) et (Q'BU):
(Q'P') // (PU)

On applique le théorème de Reim à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$, aux points de base B et Q, aux moniennes (UBQ') et (PQR) :
(PU) // (RQ').

Par transitivité de la relation de parallélisme, (Q'P') // (RQ').
Comme ces droites ont un point commun, elles sont identiques : (P'Q') = (RQ').

Alors (P'Q'R) est une Q'-monienne de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.



LE THÉORÈME DES QUATRE CERCLES DE MIQUEL– par le théorème de Reim

Partant des cercles de Reim $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sécants aux points de base A, B et des moniennes $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$
on ajoute $\mathcal{C}_4$ un cercle passant par P et Q
Soient P", Q" les seconds points d'intersection de $\mathcal{C}_4$ avec $\mathcal{C}_1$
Alors P', Q', P", Q" sont cocycliques

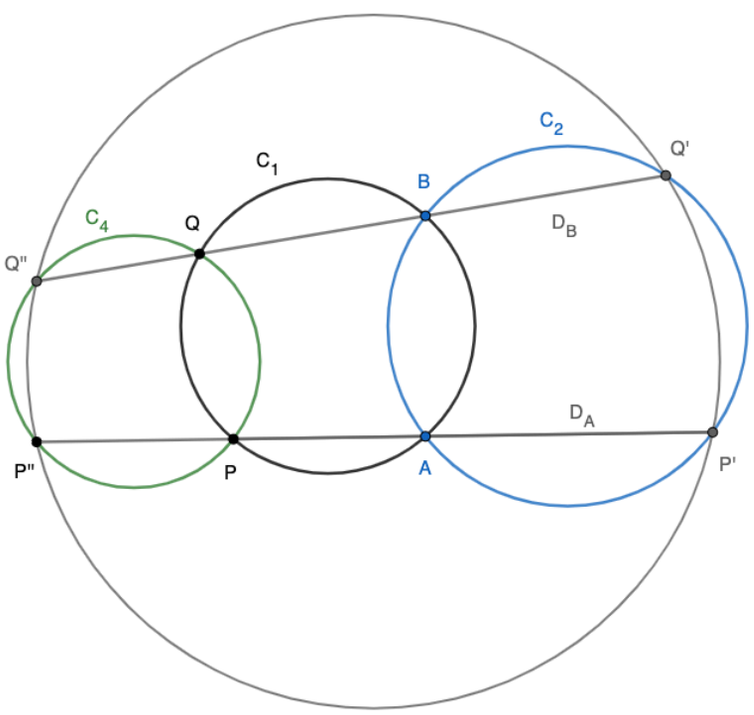
Démonstration

On applique le théorème de Reim à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_4$, aux points de base P et Q, aux moniennes (APP") et (BQQ") :

(AB) // (P"Q")

On applique le théorème gémellaire de Reim aux points de base P' et Q', aux moniennes naissantes (AP'P") et (BQ'Q"), aux parallèles (AB) et (P"Q") :

P', Q', P", Q" sont cocycliques



LE THÉORÈME DES SIX CERCLES DE MIQUEL– par le théorème de Reim

Partant des cercles de Reim C_1 et C_2 sécants aux points de base A, B ; soient	
C_3 un cercle passant par B	Q, Q' les seconds points d'intersection de C_3 avec C_1 et C_2
C_5 un cercle passant par A	P, P' les seconds points d'intersection de C_5 avec C_1 et C_2
C_4 un cercle passant par P et Q	P", Q" les seconds points d'intersection de C_4 avec C_5 et C_3
Alors P', Q', P", Q" sont cocycliques	

Démonstration

Soit U le second point d'intersection de (P"Q") avec C_3
et U' le second point d'intersection de (PP") avec C_1
Théorème des trois cercles, appliqué à C_1, C_3 et C_4 : (UBU') est une B-monienne de C_1 et C_3

Soit V le second point d'intersection de (P'Q') avec C_3
et V' le second point d'intersection de (AP') avec C_1
Théorème des trois cercles, appliqué à C_1, C_2, C_3 : (VQV') est une Q-monienne de C_1 et C_3

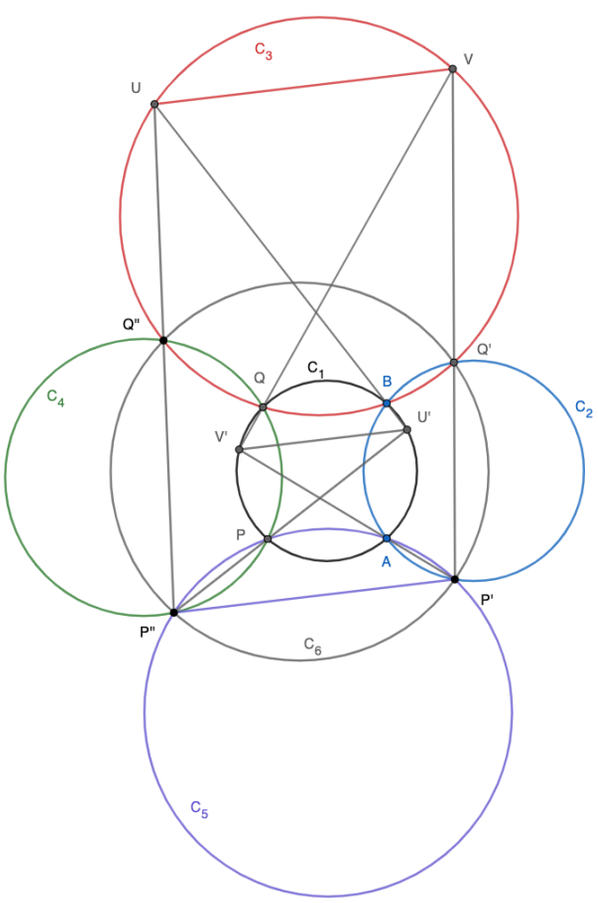
Théorème de Reim appliqué aux cercles C_3 et C_1, aux points de base B et Q, aux moniennes (UBU') et (VQV') :
(UV) // (U'V')

Théorème de Reim appliqué aux cercles C_1 et C_5, aux points de base P et A, aux moniennes (U'PP") et (V'AP') :
(U'V') // (P"P').

Par transitivité de la relation de parallélisme (UV) // (P"P')

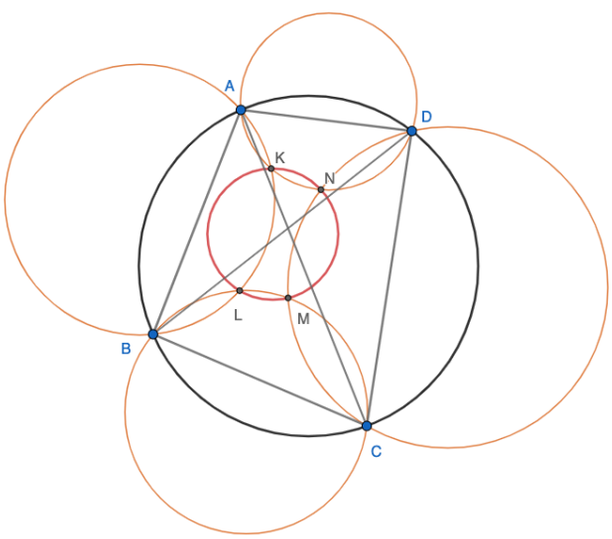
Théorème gémellaire de Reim appliqué à C_3, aux points de base Q" et Q', aux moniennes naissantes (UQ"P") et (VQ'P'), aux parallèles (UV) et (P"P') : **P', Q', P", Q" sont cocycliques** Notons C_6 ce cercle.

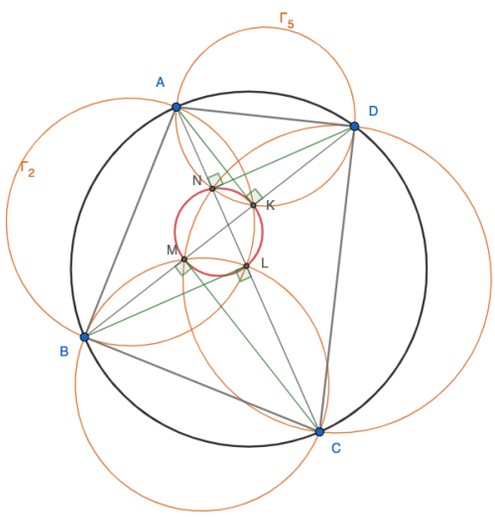
C_1 est le cercle de départ et C_6 celui d'arrivée.
Les cercles qui ont pour cordes les côtés d'un quadrilatère cyclique se recoupent en quatre points cocycliques.



REFORMULATION DU THÉORÈME DES 6 CERCLES DE MIQUEL

Pour un quadrilatère ABCD inscrit sur un cercle (noir), les 4 cercles (orange) construits sur ses côtés pour lesquels [AB], [BC], [CD], [DA] sont des **cordes**, se coupent en 4 points cocycliques (cercle rouge).





THÉORÈME DES 6 CERCLES DE MIQUEL 2.0

Pour un quadrilatère ABCD inscrit sur un cercle, les 4 cercles construits sur ses côtés pour lesquels [AB], [BC], [CD], [DA] sont des **diamètres**, se coupent en 4 points cocycliques **qui sont les projetés orthogonaux des sommets de ABCD sur ses diagonales AC et BD :**

K est le projeté orthogonal de A sur BD
L est le projeté orthogonal de B sur AC
M est le projeté orthogonal de C sur BD
N est le projeté orthogonal de D sur AC

Démonstration

C'est une configuration spéciale du théorème des 6 cercles de Miquel – ce qui prouve que K, L, M, N sont cocycliques.

K est défini comme le point d'intersection des cercles Γ_2 de diamètre [AB] et Γ_5 de diamètre [AD].

K étant inscrit sur le cercle de diamètre [AD] : $DKA = 90$ [1]

K étant inscrit sur le cercle de diamètre [AB] : $AKB = 90$

Alors $DKB = DKA + AKB = 180$ D, K, B sont alignés [2]

[1] & [2] K est le projeté orthogonal de A sur la diagonale [BD].

Les propriétés pour L, M, N sont obtenues par le même raisonnement.

QED

THÉORÈME DU CERCLE ANTARCTIQUE 2.0

Dans un triangle ABC, soient
(ABC) le cercle circonscrit
I le centre du cercle inscrit (I)
I_A le centre du cercle A-exinscrit (I_A)
A', B', C' les milieux de [BC], [AC], [AB]
A'' le pied de la hauteur issue de A sur [BC]
B*, C* les projetés orthogonaux de B, C sur la A-bissectrice
S (le pôle Sud) le second point d'intersection de la A-bissectrice AI avec (ABC)

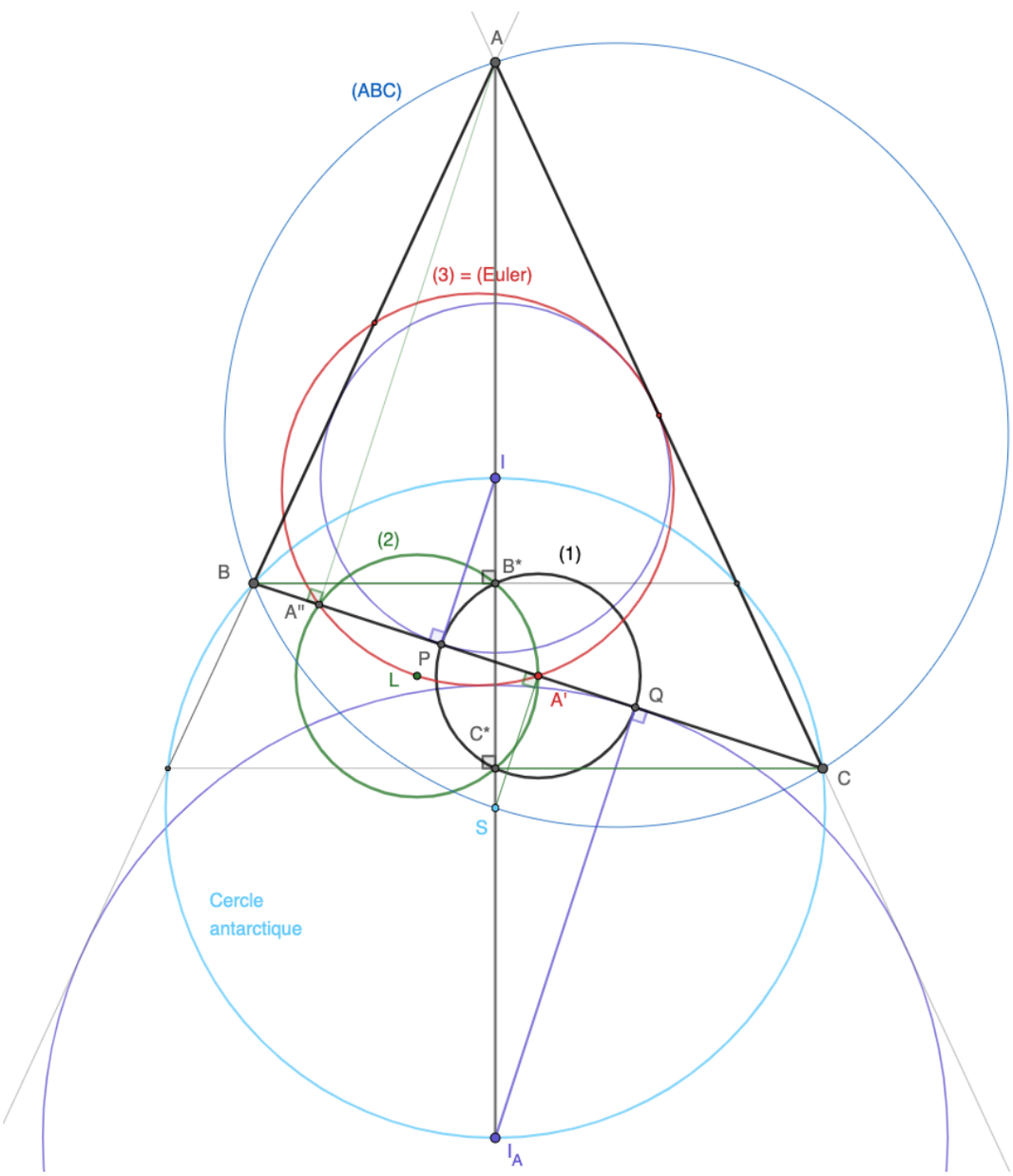
a) Le cercle de diamètre [IIA] (cercle antarctique) passe par B et C ; son centre est S.

b) Les points de contact P et Q de (I) et (I_A) avec (BC) sont symétriques par rapport à A'

c) P, Q, B*, C* sont cocycliques sur le cercle de diamètre [PQ], de centre A' - noté (1).

d) A', A'', B*, C* sont cocycliques sur un cercle noté (2).

e) Le centre de (2) est le milieu L de l'arc A'A" du cercle d'Euler (3) qui ne contient pas B'.



Démonstration de a)

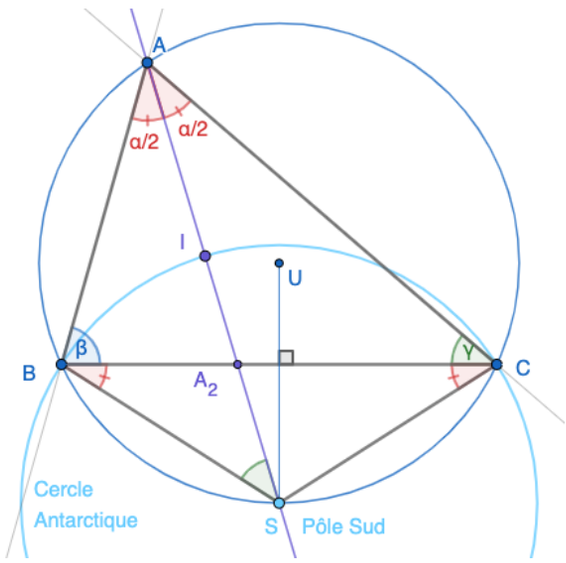
On montre que S est sur la médiatrice de [BC]

On procède par chasse aux angles.
Soit A_2 l'intersection de la A-bissectrice (AI) avec (BC).
Les angles rouges en A sont de mesure $\alpha/2$.
Par construction A, B, C, S sont cocycliques sur (ABC).
Somme des angles de ABC $\alpha + \beta + \gamma = 180$

Théorème de l'angle inscrit sur la corde AB de (ABC) : $ASB = \gamma$
Somme des angles de ABS $\alpha/2 + \beta + \gamma + SBA_2 = 180$
$SBA_2 = \alpha/2$ [1]

Théorème de l'angle inscrit sur la corde AS :
$SBA = 180 - ACS$
$SBA_2 + CBA = 180 - (ACA_2 + A_2CS)$
$\alpha/2 + \beta = 180 - \gamma - A_2CS$
$A_2CS = 180 - \gamma - \beta - \alpha/2$
$A_2CS = \alpha/2$ [2]

[1] & [2] $SBA_2 = A_2CS$ donc BCS est isocèle en S et
SB = SC [3]
S est sur la médiatrice de [BC].



On montre que S est le centre du cercle (B, C, I) appelé cercle antarctique

Somme des angles de BIS $\alpha/2 + \beta/2 + \gamma + BIS = 180$
$BIS = \alpha/2 + \beta/2 = SBI$
Donc SBI est isocèle en S **SB = SI** [4]

[3] & [4] **SB = SI = SC**

On montre que I_A est sur le cercle antarctique et que S est le milieu de $[II_A]$

Par construction A, I, I_A et S sont alignés sur la A-bissectrice AI.

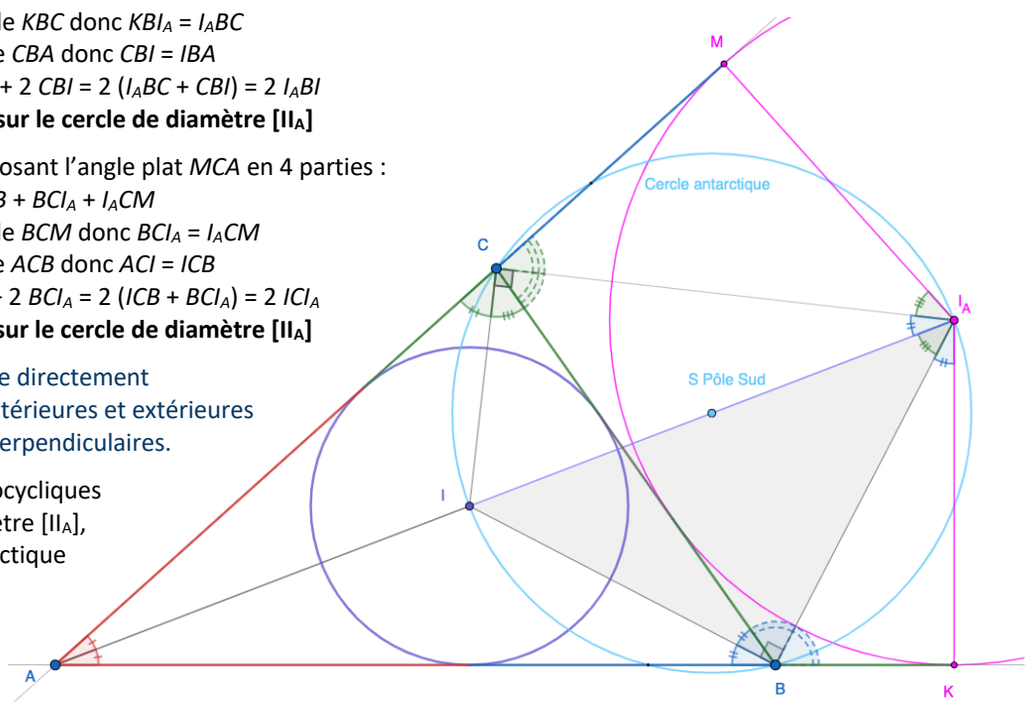
On décompose l'angle plat *KBA* en 4 parties :
$KBA = 180 = KBI_A + I_ABC + CBI + IBA$
BI_A est la bissectrice de *KBC* donc $KBI_A = I_ABC$
BI est la bissectrice de *CBA* donc $CBI = IBA$
Donc $180 = 2\ I_ABC + 2\ CBI = 2\ (I_ABC + CBI) = 2\ I_ABI$
***I_ABI* = 90 donc B est sur le cercle de diamètre $[II_A]$**

De même en décomposant l'angle plat *MCA* en 4 parties :
$MCA = 180 = ACI + ICB + BCI_A + I_ACM$
CI_A est la bissectrice de *BCM* donc $BCI_A = I_ACM$
CI est la bissectrice de *ACB* donc $ACI = ICB$
Donc $180 = 2\ ICB + 2\ BCI_A = 2\ (ICB + BCI_A) = 2\ ICI_A$
***ICI_A* = 90 donc C est sur le cercle de diamètre $[II_A]$**

On aurait aussi pu dire directement
que les bissectrices intérieures et extérieures
de (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

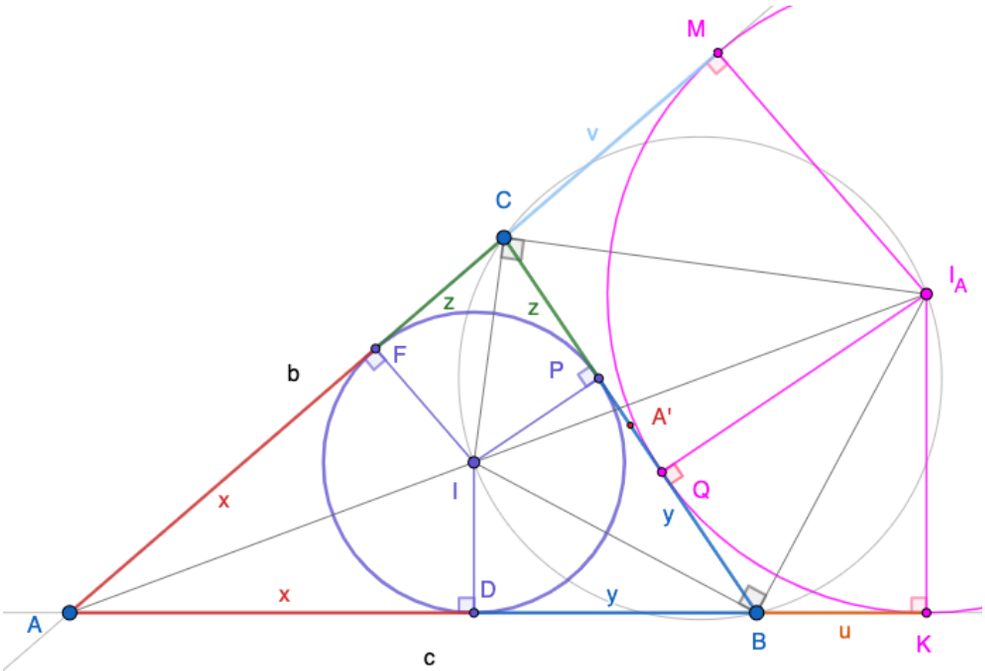
Donc I, I_A, B, C sont cocycliques
sur le cercle de diamètre $[II_A]$,
qui est le cercle antarctique
dont le centre est S.

QED



Démonstration de b)

On montre que le milieu de [BC] coïncide avec le milieu de [PQ]



On utilise la notation standard AB = c AC = b BA' = A'C = a/2

La chasse aux tangentes sur le cercle inscrit donne 3 équations :

AD = AF = x BP = BD = y CP = CF = z

BC = BP + PC	a = y + z	[1]
AC = AF + FC	b = x + z	[2]
AB = AD + DB	c = x + y	[3]
[1] + [2] - [3]	**a + b - c = 2z**	[4]

La chasse aux tangentes sur le cercle exinscrit donne 3 équations :

BK = BQ = u	CM = CQ = v	AK = AM = AB + BK = AC + CM
		c + u = b + v
		u - v = b - c [5]
BC = BQ + QC = BP + PC		u + v = y + z [6]
[5] + [6]		2u = y + z + b - c
BC = y + z = a		**2u = a + b - c** [7]

[4] & [7] **u = z** **BQ = CP**

BA' = BQ + QA' = CA' = CP + PA'
On élimine BQ et CP : il reste **QA' = PA'**

Le milieu A' de [BC] coïncide avec le milieu de [PQ]

QED

Démonstration de c)

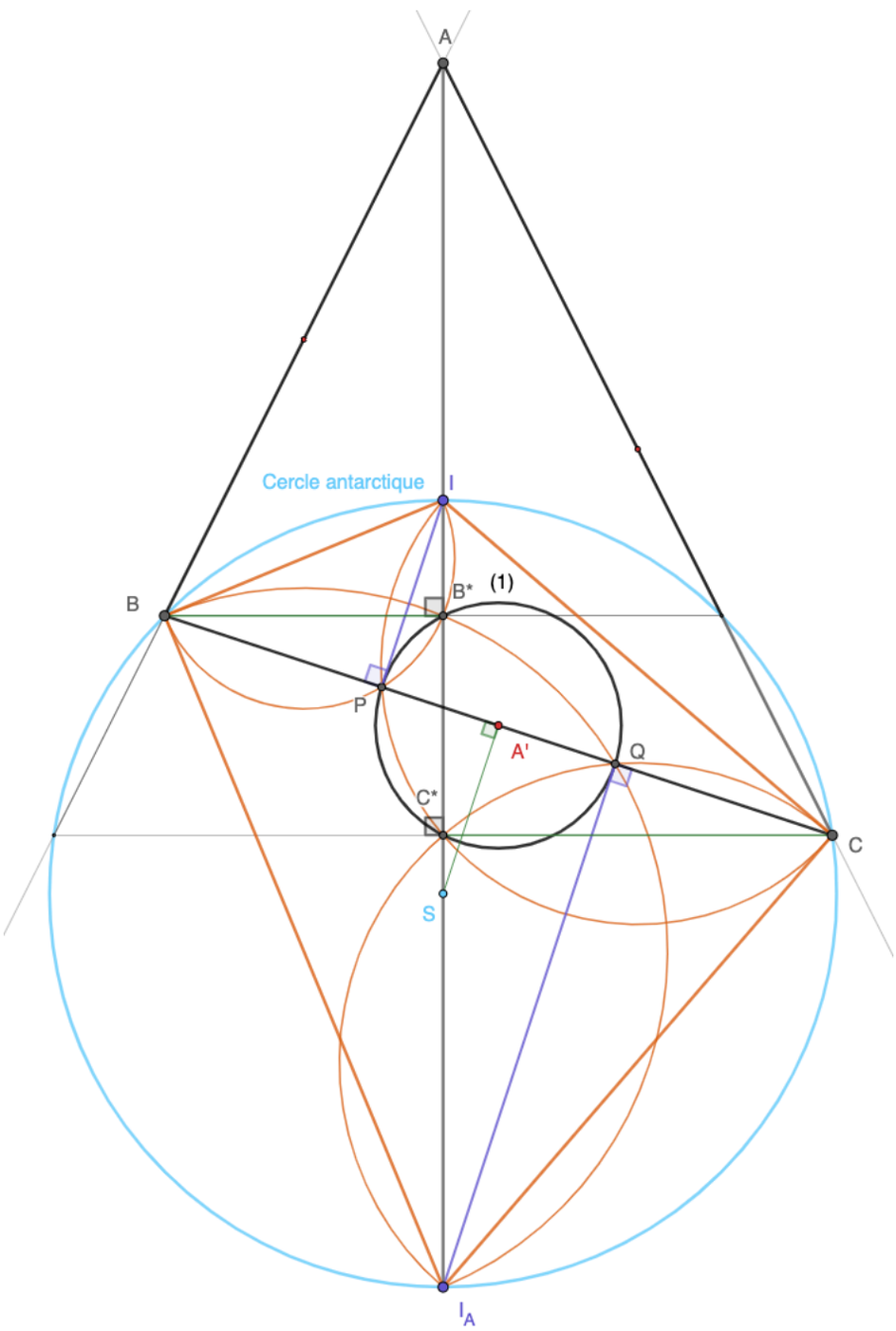
Dans a) on a montré que B, I_A, C, I sont sur le cercle antarctique.
Le quadrilatère BI_ACI est donc inscrit sur le cercle antarctique.

D'après le théorème des 6 cercles de Miquel 2.0 appliqué à BI_ACI, les cercles construits sur ses côtés, de diamètre $[BI_A]$, $[I_AC]$, $[CI]$, $[IB]$, se coupent en 4 points cocycliques qui sont les projetés orthogonaux des sommets de BI_ACI sur ses diagonales.

Les 2 diagonales de BI_ACI sont [BC] et $[II_A]$.
Les projetés de B et C sur $[II_A]$ sont B* et C* car ils ont été ainsi définis
Les projetés de I et I_A sur [BC] sont P et Q propriété des points de contact de (I) et (I_A) avec (BC)

P, Q, B*, C* sont donc cocycliques.

QED



Démonstration de d)

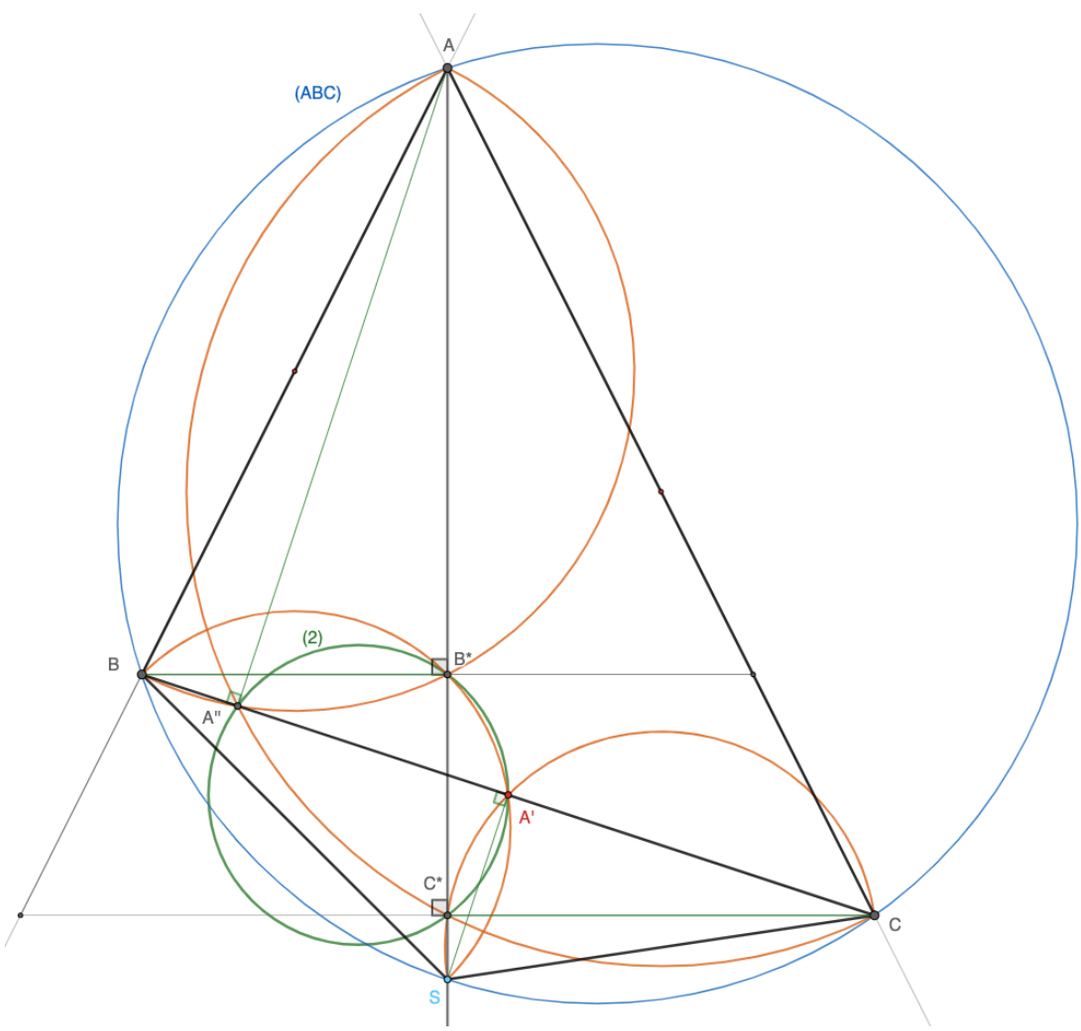
Par sa définition S est sur (ABC).
Le quadrilatère ABSC est donc inscrit sur le cercle circonscrit (ABC).

D'après le théorème des 6 cercles de Miquel 2.0 appliqué à ABSC, les cercles construits sur ses côtés, de diamètre [AB], [BS], [SC], [CA], se coupent en 4 points cocycliques qui sont les projetés orthogonaux des sommets de ABSC sur ses diagonales.

Les 2 diagonales de ABSC sont [AS] et [BC].
Les projetés de B et C sur [AS] sont B* et C*
Le projetés de A sur [BC] est A'' car AA'' est la A-hauteur de ABC
Le projeté de S sur [BC] est A' car on a montré dans a) que A'S est la médiatrice de BC

A', A'', B*, C* sont donc cocycliques.

QED



Démonstration de e)

On a défini (2) (et prouvé son existence) comme le cercle passant par A', A'', B*, C*.
On note (3) le cercle des 9 points – dit d'Euler ou de Feuerbach - de ABC. Il passe par A', B', C' et A".

Soient L et M les points d'intersection de la médiatrice de [A'A"] avec (3).
*L ainsi défini est sur la médiatrice de [A'A'']. Toute la démonstration consiste à prouver que L est aussi sur la médiatrice de [B*C*].*

Par construction [LM] est un diamètre de (3).

B' et C' étant les milieux de [AC] et [AB], par le théorème de la droite des milieux, (B'C') est parallèle à (BC).

Le quadrilatère A"A'B'C' a deux côtés opposés parallèles. C'est un trapèze.

Un trapèze est dit isocèle s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :
- (P1) Les angles opposés sont supplémentaires.
- (P2) La médiatrice d'une des bases est axe de symétrie du trapèze. Elle est aussi la médiatrice de l'autre base.
- (P3) Deux angles adjacents à une même base sont égaux.
- (P4) Les deux côtés opposés, non parallèles, sont de même longueur.

Le quadrilatère A"A'B'C' est cyclique car ses 4 sommets sont 4 des 9 points du cercle d'Euler (3).
Donc par le théorème de l'angle inscrit ses angles opposés sont supplémentaires : A"A'B'C' vérifie (P1).
C'est un trapèze isocèle.
Il vérifie alors (P2) : **(LM) est la médiatrice de [B'C']**
Alors MC'B' est isocèle et $B'C'M = MB'C' = \theta$
Théorème de l'angle inscrit dans (3) sur la corde [C'M] : $MA'C' = MB'C' = \theta$
Théorème de l'angle inscrit dans (3) sur la corde [MB'] : $B'A'M = B'C'M = \theta$
Alors $B'A'M = MA'C'$: **(A'M) est la bissectrice de *B'A'C'***

Par le théorème de la droite des milieux : B'A' = ½ AB = AC'
et A'B' // AC' : A'B'AC' est un parallélogramme.
Ses bissectrices (A'M) et (AS) des deux angles opposés
B'A'C' et *C'AB'* sont parallèles : **AS//A'M**

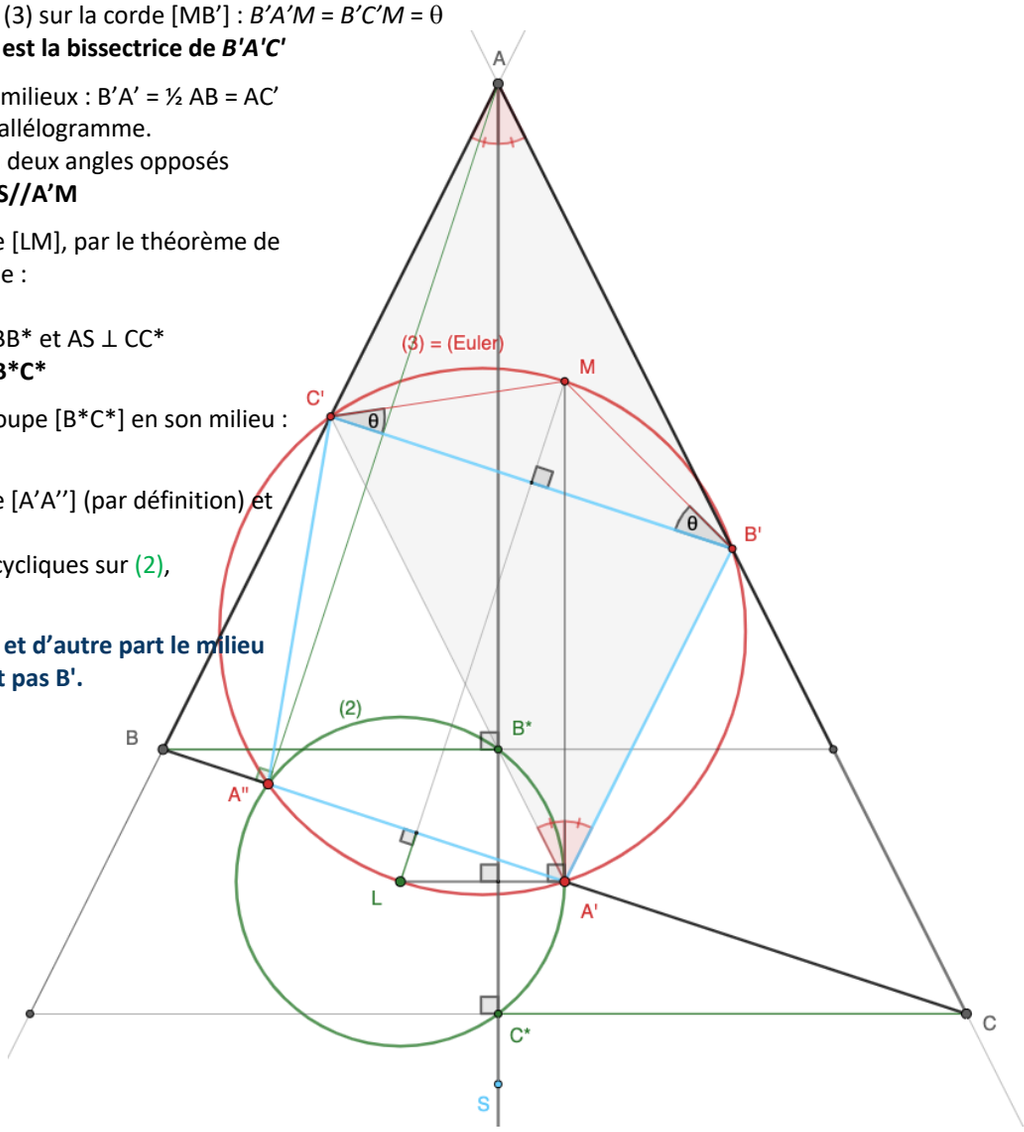
A' étant sur le cercle de diamètre [LM], par le théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle :
A'L ⊥ A'M donc AS ⊥ A'L
Par construction AS ⊥ BB* et AS ⊥ CC*
donc **A'L // BB* // CC*** et **A'L ⊥ B*C***

A' étant le milieu de [BC], (A'L) coupe [B*C*] en son milieu :
(A'L) est la médiatrice de [B*C*]

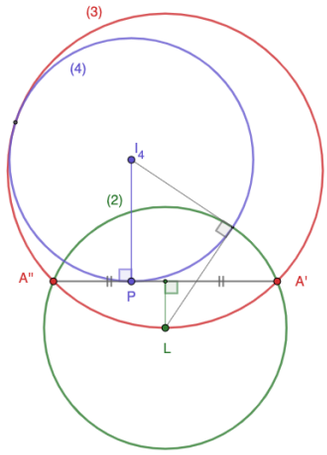
L est à la fois sur la médiatrice de [A'A''] (par définition) et sur la médiatrice de [B*C*] :
les points A', A", B*, C* étant cocycliques sur (2),
L est donc le centre de (2).

L est d'une part le centre de (2), et d'autre part le milieu de l'arc A'A" de (3) ne contenant pas B'.

QED



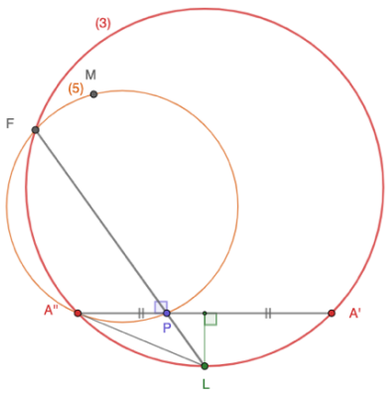
THÉORÈME DU CERCLE ARCTIQUE



Soit un cercle (3)
[A''A'] une corde de (3)
L l'intersection de (3) avec la médiatrice de [A''A']
(2) le cercle de centre L passant par A', A''
P un point de [A''A']
(4) un cercle tangent à (A''A') en P et orthogonal à (2).

Alors (4) est tangent à (3)

Démonstration



Soit F le second point d'intersection de (LP) avec (3)

Soit (5) le cercle passant par A", P, F

Supposons qu'il existe M le second point d'intersection de (5) et (4).
On va montrer que M = F

On applique le théorème 2' de Reim aux cercles (3) et (5),
aux points de base A'' et F, aux moniennes (LA''A'') et (LFP),
aux parallèles T_L et (A''P) :
(5) est tangent à (LA'') en A''.

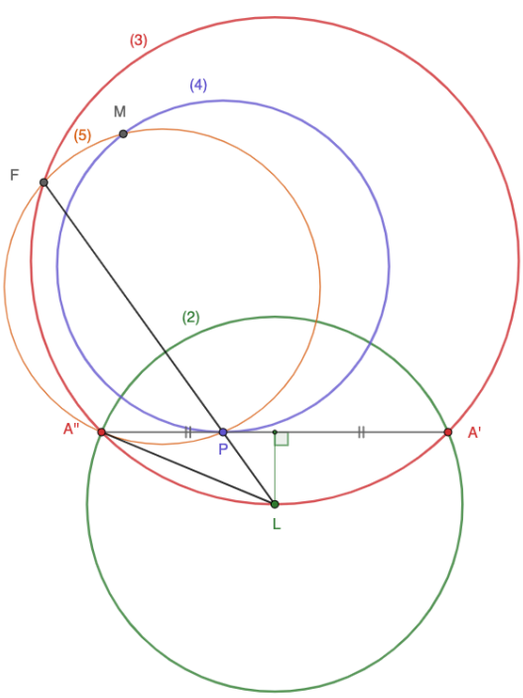
[LA''] étant un rayon de (2) : (2) ⊥ (5)

Par ailleurs, par hypothèse (2) ⊥ (4)

Donc (2) est orthogonal à deux cercles sécants (4) et (5).

L'axe radical de (4) et (5) est la droite
passant par leurs points d'intersection : c'est (PM).

On a vu la propriété # 1 des cercles orthogonaux :
Le centre d'un cercle orthogonal à deux cercles sécants est sur l'axe radical de ces deux cercles.



Donc le centre L de (2) doit être sur (PM).
Ce qui n'est possible (axiome d'incidence)
que si M = F.

F étant un point de (3), M étant un point de (4)
et M coïncidant avec F : (3) et (4) passent par F.
(3) et (4) ne sont donc pas disjoints.
Soit ils se coupent, soit ils se touchent tangentiellement en F,
en tous les cas ils ont F en commun.

Ceci nous permet d'appliquer le théorème 8' de Reim
aux cercles (3) et (4), au point de base F, à la monienne (LFP) :
les tangentes à (4) en P et à (3) en L étant parallèles,
(4) est tangent à (3) en F.

QED

DÉMONSTRATION SYNTHÉTIQUE DU THÉORÈME DE FEUERBACH

Théorème de Feuerbach

Le cercle d'Euler d'un triangle est tangent à son cercle inscrit.
Le point de contact est le point de Feuerbach F de ABC.

Démonstration

Dans un triangle ABC :
(I) est le cercle inscrit de centre I, noté (4) — (I_A) est le cercle A-exinscrit
P et Q sont les points de contact de (BC) avec (I) et (I_A) — B*, C* sont les projetés orthogonaux de B, C sur (AI)
A', B', C' sont les milieux de [BC], [AC], [AB] — A'' le pied de la hauteur issue de A
(3) est le cercle des 9 points (dit d'Euler) de ABC. Ces 9 points incluent A', B', C', A''.
L est l'intersection de (3) avec la médiatrice de [A'A''].

D'après le théorème du cercle antarctique 2.0 :
B*, C*, P, Q sont cocycliques sur le cercle (1), de diamètre [PQ], de centre A'.
B*, C*, A', A" sont cocycliques sur un cercle noté (2), de centre L.

Par construction *IPA'* = 90 donc **(4) ⊥ (1)**

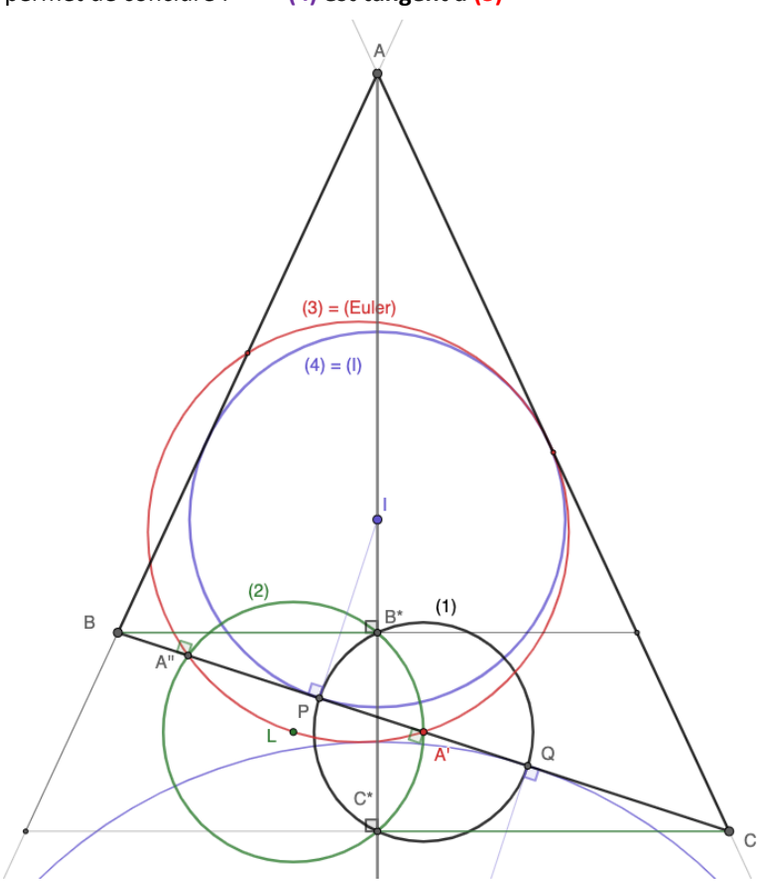
On a vu la propriété # 2 des cercles orthogonaux :
Si un cercle a son centre sur l'axe radical de deux cercles sécants et est orthogonal à l'un d'eux, alors il est orthogonal à l'autre.

Ici (4) a son centre I sur l'axe radical des cercles sécants (1) et (2). De plus (4) ⊥ (1). Alors (4) ⊥ (2). En détail :

L'axe radical de deux cercles sécants est la droite définie par les points d'intersection de ces cercles.
L'axe radical de (1) et (2) est (B*C*) = (AI). Donc le centre I de (4) est sur l'axe radical des cercles sécants (1) et (2).
Comme (4) ⊥ (1) on a alors : **(4) ⊥ (2)**

P étant un point de la corde [A''A'] du cercle (3), on est exactement dans la configuration du théorème du cercle arctique qui nous permet de conclure : **(4) est tangent à (3)**

QED



BIBLIOGRAPHIE & REMERCIEMENTS

Le chapitre sur la constructibilité et le théorème de Wantzel reprend de grandes parties d'un cours de géométrie de Arnaud Bodin dont la clarté est à saluer.

L'algèbre de Gauss-Wantzel est adaptée du *Cours de géométrie* de Dany-Jack Mercier.

La démonstration synthétique du théorème de Feuerbach est une idée de Jean-Louis Ayme que je remercie pour son aide. Ma contribution étant d'essayer de la rendre accessible au plus grand nombre possible.

L'axiomatique hilbertienne est adaptée de l'article « Hilberts Axiomensystem der euklidischen Geometrie » sur de.wikipedia.org

Le site de Gérard Villemin est toujours une source de première référence.

QUELQUES RECOMMANDATIONS FINALES

Jouez à Euclidea pour bien ancrer le concept de constructibilité.

Cela vous aidera pour bien utiliser GeoGebra dont la fonctionnalité dynamique vous permettra d'expérimenter la géométrie par vous-même.
C'est aussi beaucoup plus efficace que de dessiner des figures à la main.

Chaque démonstration de ce livre est un exercice en soi et vous êtes encouragés à les refaire par vous-même.

La clef finale de votre succès est de faire des exercices et des annales.

Pour calibrer le niveau de difficulté à votre classe et pour vous mesurer aux autres de votre génération, rien de mieux que les Mathematik Olympiaden allemandes qui couvrent toutes les classes du collège et du lycée avec 4 tours éliminatoires de difficulté croissante pour chaque classe.
Un indicatif de performance :
être qualifié pour le 3ème tour c'est l'équivalent statistique pour votre classe d'âge d'intégrer une école de tout premier rang ;
être qualifié pour le 4ème tour c'est intégrer l'ENS Ulm ou être dans les 50 premiers à l'X.

Une multitude d'annales sont disponibles sur
https://www.mathematik-olympiaden.de

Deux bons livres d'exercices corrigés :
Geometria – scientiae atlantis de Eckard Specht
Die schönsten Aufgaben der Mathematik Olympiade in Deutschland

En France l'association Animath supervise la Préparation Olympique Française de Mathématiques :
https://maths-olympiques.fr

Voilà, c'est fini.

J'espère vous avoir offert un beau tour d'horizon de la géométrie euclidienne.

■